Soluzione della seconda prova parziale di Calcolo Numerico
21 Dicembre 2012

Esercizio 1

(a) La matrice $A^{(n)}$ è tridiagonale simmetrica, quindi i suoi autovalori $\mu_i^{(n)}$, $i = 1, \ldots, n$ sono reali per ogni k.

(b) È $A^{(n)} = I_n + kB^{(n)}$. Quindi $\mu_i^{(n)} = 1 + k\lambda_i^{(n)}$, dove $\lambda_i^{(n)}$, $i = 1, \ldots, n$ sono gli autovalori di $B^{(n)}$.

(c) Tenendo conto del fatto che $B^{(n)}$ è tridiagonale con elementi principali nulli, risulta

$$p_n(\lambda) = -\lambda p_{n-1}(\lambda) - p_{n-2}(\lambda), \quad \text{con} \quad p_0(\lambda) = 0, \quad p_1(\lambda) = -\lambda.$$

Quindi

$$p_2(\lambda) = \lambda^2 - 1, \quad p_3(\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda, \quad p_4(\lambda) = \lambda^4 - 3\lambda^2 + 1.$$

(d) Si ha

$$\lambda_{1,2}^{(2)} = \pm 1, \quad \lambda_1^{(3)} = 0, \quad \lambda_{2,3}^{(3)} = \pm\sqrt{2}, \quad \lambda_{1,2,3,4}^{(4)} = \pm\sqrt{\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}} = \frac{\pm 1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

quindi

$$\rho(B^{(2)}) = 1, \quad \rho(B^{(3)}) = \sqrt{2} \sim 1.414, \quad \rho(B^{(4)}) = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \sim 1.618.$$

(e) Si ha

$$\mu_{1,2}^{(2)} = 1 \pm k, \quad \mu_1^{(3)} = 1, \quad \mu_{2,3}^{(3)} = 1 \pm k\sqrt{2}, \quad \mu_{1,2,3,4}^{(4)} = 1 + k\frac{\pm 1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

e

$$\rho(A^{(2)}) = 1 + |k|, \quad \rho(A^{(3)}) = 1 + |k|\sqrt{2}, \quad \rho(A^{(4)}) = 1 + |k|\frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

L'unione dei cerchi di Gerschgorin di $A^{(n)}$ è formata dal solo cerchio di centro $(1, 0)$ e raggio $2|k|$. Se ne ricava la maggiorazione $\rho(A^{(n)}) \leq 1+2|k|$, valida qualunque sia n. Ne segue che $\rho(B^{(n)}) \leq 2$ per ogni n.

Esercizio 2

(a) La matrice di iterazione di Jacobi è

$$J = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

il suo polinomio caratteristico è

$$p(\lambda) = -\big(\lambda^3 - \frac{3}{4}\lambda + \frac{1}{4}\big) = -\big(\lambda - \frac{1}{2}\big)^2(\lambda + 1).$$

Poiché $\rho(J) = 1$, il metodo di Jacobi non converge.

(b) La matrice di iterazione di Gauss-Seidel è

$$G = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3/2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1/4 & 1/3 & 0 \\ -1/8 & -1/6 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/4 & -1/4 \\ 0 & 1/8 & 3/8 \end{bmatrix},$$

il suo polinomio caratteristico è

$$p(\lambda) = -\lambda\Big(\lambda^2 - \frac{5}{8}\lambda + \frac{1}{8}\Big).$$

Gli autovalori sono

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_{2,3} = \frac{5 \pm i\sqrt{7}}{16},$$

quindi $\rho(G) = 1/\sqrt{8}$ e il metodo di Gauss-Seidel converge.

Esercizio 3

(a) È

$$p(x) = 1 + \frac{x^2}{1-\overline{x}^2} = 1 + x^2\,\frac{k^2}{2k-1}.$$

(b) Nell'intervallo $[-\overline{x}, \overline{x}]$, con $\overline{x} < 1$, il resto

$$r(x) = f(x) - p(x) = \frac{1}{1-x^2} - 1 - \frac{x^2}{1-\overline{x}^2}$$

si annulla in $\pm\overline{x}$ e 0. Quindi vi sono almeno due punti in cui si annulla la derivata

$$r'(x) = \frac{2x}{(1-x^2)^2} - \frac{2x}{1-\overline{x}^2}.$$

$r'(x) = 0$ per $x = 0$ e per $(1-x^2)^2 = 1-\overline{x}^2$, cioè per $x_m^2 = 1-\sqrt{1-\overline{x}^2}$ (il segno davanti alla radice è stato scelto in modo che $|x_m| < \overline{x}$). Quindi 0 è punto di massimo, $\pm x_m$ sono due punti di minimo e $r(x) \le 0$ in $[-\overline{x}, \overline{x}]$. I corrispondenti valori della $r(x)$ sono $r(0) = 0$ e

$$r(x_m) = \frac{1}{1-x_m^2} - 1 - \frac{x_m^2}{1-\overline{x}^2} = \frac{\overline{x}^2 - 2 + 2\sqrt{1-\overline{x}^2}}{1-\overline{x}^2}.$$

Quindi

$$r_{max} = |r(x_m)| = \frac{2 - \overline{x}^2 - 2\sqrt{1-\overline{x}^2}}{1-\overline{x}^2}.$$

(c) Sostituendo a $\overline{x}$ il valore $(k-1)/k$ si ha

$$r_{max} = \frac{(k-\sqrt{2k-1})^2}{2k-1}.$$

Per k grande r_{max} si comporta come $k/2$, quindi cresce al crescere di k.

Non era opportuno risolvere l'esercizio considerando l'espressione del resto in termini della $f'''(x)$. Infatti $f'''(x)$ non è definita nei punti ± 1, mentre per k grande $\overline{x}$ si avvicina a 1. Questo rende estremamente difficile dare una maggiorazione di $|f'''(x)|$ per $x \in [-\overline{x}, \overline{x}]$ al variare di k. Ad ogni modo alla domanda (c) sarebbe bastato rispondere che al crescere di k è crescente la maggiorazione di r_{max}

$$r_{max} \leq \max_{x \in [-\overline{x}, \overline{x}]} x(x^2 - \overline{x}^2) \max_{x \in [-\overline{x}, \overline{x}]} \frac{|f'''(x)|}{3!}.$$