Soluzione della prova scritta di Calcolo Numerico del 23/01/2017

Esercizio 1

(a) L'errore inerente risulta

$$\epsilon_{in} = c_x \epsilon_x, \quad \text{dove} \quad c_x = \frac{x\, f'(x)}{f(x)} = -\frac{x(1+2x)}{1+x+x^2}.$$

Si osserva che

$$\lim_{x\to 1} |c_x| = 1$$

Inoltre si osserva che $|c_x| < 4$, quindi il problema risulta sempre ben condizionato.

(b) L'errore algoritmico per il primo algoritmo è

$$\epsilon^{(1)}_{\text{alg}} = \epsilon^{(3)} + \frac{x(1+x)}{f(x)}(\epsilon^{(2)} + \frac{x^2}{x+x^2}\epsilon^{(1)}),$$

dove $\epsilon^{(1)}$ è l'errore locale dovuto al calcolo di x^2, $\epsilon^{(2)}$ e $\epsilon^{(3)}$ sono gli errori locali del calcolo di $x + x^2$ e di $1 + x + x^2$ rispettivamente. Quindi, maggiorando gli errori locali con la precisione di macchina otteniamo

$$|\epsilon^{(1)}_{\text{alg}}| < u\,(1 + \frac{|x+x^2| + x^2}{1+x+x^2}),$$

che risulta sempre superiormente limitato da $4u$.

Per il secondo algoritmo abbiamo

$$\epsilon^{(2)}_{\text{alg}} = \epsilon^{(5)} - \epsilon^{(1)} + \epsilon^{(4)} - \frac{x^2}{1-x^3}(\epsilon^{(3)} + \epsilon^{(2)}),$$

dove $\epsilon^{(1)}, \epsilon^{(2)}, \epsilon^{(3)}$ sono gli errori per il calcolo di $1 - x$, x^2, e x^3, $\epsilon^{(4)}$ e $\epsilon^{(5)}$ sono gli errori locali del calcolo di $1 - x^3$ e $(1 - x)/(1 - x^3)$.

Poiché $\frac{x^2}{|1-x^3|}$ non risulta superiormente limitato in un intorno di 1, abbiamo che il secondo algoritmo risulta instabile in un intorno di 1.

Esercizio 2

(a) Il polinomio $f(x)$ ha tre radici reali, $\alpha = 1, \beta = (1-\sqrt{5})/2$ e $\gamma = (1+\sqrt{5})/2$. Analizzando la derivata prima di $f(x)$ si ottengono le ascisse dei punto di massimo $x = 0$ e di minimo, $x = 4/3$. Il punto $x = 2/3$ risulta invece ascissa del punto di flesso.

Applicando le condizioni del teorema di convergenza in largo abbiamo che il metodo delle tangenti risulta convergere in modo monotono decrescente $\gamma = (1+\sqrt{5})/2$ per ogni $x_0 > \gamma$. Allo stesso modo abbiamo una successione monotona crescente e convergente a $\beta = (1-\sqrt{5})/2$ scegliendo $x_0 < \beta$. Per $2/3 < x_0 < 1$ abbiamo convergenza monotona a $\alpha = 1$. Facendo considerazioni grafiche (di veda l Figura 1) possiamo vedere che abbiamo una successione convergente a γ anche prendendo $x_0 > 4/3$, punto di minimo, e a β per ogni $x_0 < 0$. L'ordine é due per tutte le successioni convergenti alle soluzioni.

(b) La funzione $g(x)$ ha un asintoto verticale in $x = 0$. La derivata prima di $g(x)$ è $g'(x) = \frac{1}{2x^2} + x$ e si annulla in $x = 2^{-1/3}$. Dopo aver fatto i limiti a $\pm\infty$, per $x \to 0^{\pm}$ e studiato la concavità di $g(x)$, possiamo disegnare il grafico che risulta com in Figura 2. Poichè $g'(\alpha) = g'(1) = 1/2$ abbiamo convergenza locale. In particolare, scegliendo un $x_0 \in (1, (1+\sqrt{5})/2)$ abbiamo una convergenza monotona decrescente di ordine 1. Anche scegliendo $x_0 \in (2^{-1/3}, 1)$ abbiamo una convergenza monotona crescente, in tale intervallo infatti $0 < g'(x) < 1$. In realtà abbiamo altri punti che danno luogo ad una successione convergente ad α, basta scegliere $x_0 > x^*$, dove $0 < x^* < \gamma$ è tale che $g(x^*) = \gamma$.

Si nota invece che $|g'(\beta)| > 1$ e $|g'(\gamma)| > 1$ quindi non abbiamo convergenza locale a questi punti fissi.

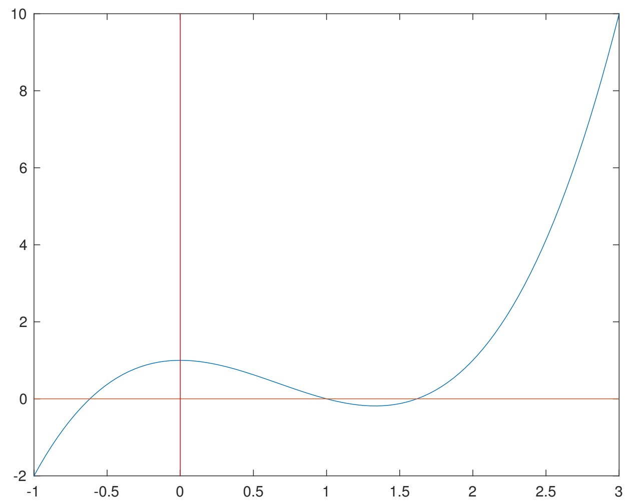

Figure 1: Grafico di $f(x)$

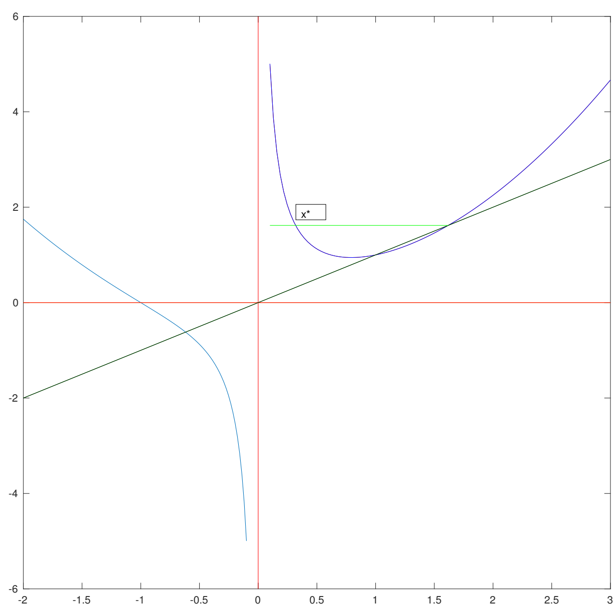

Figure 2: Grafico di $g(x)$

Esercizio 3

(a) La matrice di iterazione di Jacobi risulta

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -2k & 0 \\ k & 0 & -k \\ 0 & -2k & 0 \end{bmatrix}$$

Calcolando il polinomio caratteristico otteniamo $p(\lambda) = -\lambda^3$, per cui tutti gli autovalori sono uguali a zero. Il metodo di Jacobi risulta quindi convergente in meno di $n = 3$ passi.

La matrice di iterazione del metodo di Gauss-Seidel risulta

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -k & 1 & 0 \\ 0 & 2k & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & -2k & 0 \\ 0 & 0 & -k \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2k & 0 \\ 0 & -2k^2 & -k \\ 0 & 4k^3 & 2k^2 \end{bmatrix}.$$

Anche in questo caso la matrice ha autovalori tutti nulli, e quindi, per $k \neq \pm\sqrt{2}2$ abbiamo convergenza in meno di 3 passi indipendentemente dal valore di k.

(b) La matrice di iterazione $P = M^{-1}N$ risulta

$$P = \begin{bmatrix} 0 & -2k & 0 \\ k/(1-2*k^2) & 0 & 0 \\ -2k^2/(1-2k^2) & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico in questo caso risulta $p(\lambda) = -\lambda(\lambda^2 + \frac{2k^2}{1-2k^2})$. Affinchè sia $\rho(P) < 1$ occorre che $\left|\frac{2k^2}{1-2k^2}\right| < 1$, cioè per $-1/2 < k < 1/2$.

(c) Si osserva che per $k = 0$ $\rho(P) = 0$ e quindi anche questo metodo converge in un numero finito di passi, per $x \in (-1/2, 1/2) - \{0\}$, invece la velocità di convergenza di questo metodo è minore della velocità di convergenza dei metodi di Jacobi e Gauss-Seidel.

Esercizio 4

(a)Poiché $f(-1) = 1/3, f(0) = 1/2$ e $f(1) = 1$, il polinomio di interpolazione risulta

$$p(x) = 1/6x^2 + 1/3x + 1/2.$$

(b) Applicando il teorema del resto abbiamo che

$$r(x) = \pi(x)\,\frac{f'''(\xi)}{6}, \quad \pi(x) = x(x-1)(x+1),\, \xi \in [-1, 1].$$

Osserviamo che $f'''(\xi) = \frac{6}{(2-\xi)^4}$, e quindi $|f'''(\xi)| \leq |f'''(1)| = 6$. Si nota inoltre che $|\pi(x)| \leq \pi(\pm 1/\sqrt{3}) = 2/(3\sqrt{3})$. Si ottiene quindi $|r(x)| \leq 2/(3\sqrt{3})\, 6/6 = 2/(3\sqrt{3}) \approx 0.3849$.