Soluzione della prova scritta
di Calcolo Numerico del 25/6/ 2008

Esercizio 1

Si ha

$$\epsilon_{in} = c_x \epsilon_x, \quad \text{dove} \quad c_x = \frac{x f'(x)}{f(x)} = \frac{\exp(1+\sin x) x \cos x}{\exp(1+\sin x) - 1}.$$

Quindi il problema del calcolo di $f(x)$ è malcondizionato nell'intorno dei punti x risolventi l'equazione $\sin x = -1$, cioè i punti $x = 3/2\pi + 2k\pi$ per k intero. Nessuno di tali punti appartiene all'intervallo chiuso assegnato. Inoltre vale la limitazione

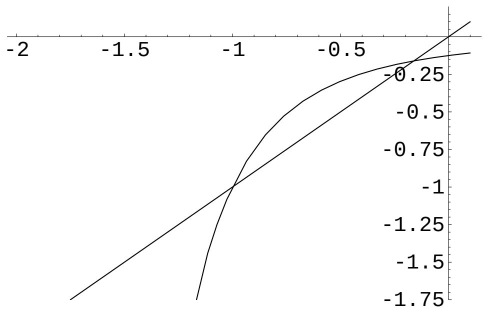
$$\max_{0 \le x \le \pi} |c_x| \le \frac{\mathrm{e}^2 \pi}{\mathrm{e} - 1}.$$

Esercizio 2

a) L'equazione $f(x) = 0$ è equivalente all'equazione

$$x = g(x), \quad g(x) = -\frac{1}{(x+2)^3}.$$

Per $x > 0$ è $g(x) < 0$ e per $x < -2$ è $g(x) > 0$. Quindi non vi possono essere soluzioni al di fuori dell'intervallo $(-2, 0)$. Il grafico di $y = x$ e $y = g(x)$ nell'intervallo $(-2, 0)$ è



Vi sono due soluzioni reali $\alpha = -1$ e $\beta \in [-1/2, 0]$.
b) Si ha $g'(\alpha) > 1$, quindi non vi è convergenza locale ad α, mentre $|g'(\beta)| < 1$, quindi vi è convergenza locale a β. Poiché nell'intorno $\mathcal{I}$ di raggio $1/2$ di β è $0 < g'(x) < 1$, le successioni ottenute a partire da $x_0 \in \mathcal{I}$ risultano convergenti a β in modo monotono. Graficamente si vede che si ha convergenza a β partendo da un qualunque $x_0 \neq -2$. Poiché $g'(\beta) \neq 0$, la convergenza è del primo ordine.

Esercizio 3

(a) Si applica il metodo di Gauss alla matrice

$$B^{(1)} = [A\,|\,I] = \left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Si ottiene

$$B^{(2)} = \left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & -1 & 0 & 0 & 1/2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$B^{(3)} = \left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & -1 & 0 & 0 & 1/2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4/3 & -1 & 0 & 1/3 & 2/3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$B^{(4)} = \left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & -1 & 0 & 0 & 1/2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4/3 & -1 & 0 & 1/3 & 2/3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5/4 & -1 & 1/4 & 2/4 & 3/4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$B^{(5)} = \left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & -1 & 0 & 0 & 1/2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4/3 & -1 & 0 & 1/3 & 2/3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5/4 & -1 & 1/4 & 2/4 & 3/4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/5 & 1/5 & 2/5 & 3/5 & 4/5 & 1 \end{array}\right]$$

Si indica con $A^{(5)}$ la matrice formata dalle prime 5 colonne di $B^{(5)}$ e con $\mathbf{b}^{(k)}$ la $(k+5)$-esima colonna di $B^{(5)}$. Risolvendo i sistemi $A^{(5)}\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{b}^{(k)}$ per $k = 1, \ldots, 5$, si ottiene

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{x}^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \ \mathbf{x}^{(4)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}, \ \mathbf{x}^{(5)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Quindi

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Il determinante di A è dato dal prodotto degli elementi principali di $B^{(5)}$, quindi $\det A = 1$.

b) È $\|A\|_\infty = 4$ e $\|A^{-1}\|_\infty = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$. Quindi $\mu_\infty(A) = 60$.

c) Generalizzando, si ha che per una matrice della forma di A e di ordine n risulta

$$\|A\|_\infty = 4 \quad \text{e} \quad \|A^{-1}\|_\infty = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}\,,$$

quindi $\mu_\infty(A) = 2n(n+1)$.

Esercizio 4

Il polinomio cercato $p(i)$ deve soddisfare alle condizioni

$$p(1) = -4, \quad p(2) = 2, \quad p(3) = 8, \quad p(4) = 14.$$

Risulta

$$p(i) = 6\,i - 10.$$

Il grafico di $p(i)$ è una retta. La verifica che $p(i)$ interpola anche i punti y_i per $i > 4$ viene fatta per induzione. Infatti si ha

$$2\,p(i-1) - p(i-2) = 2\big(6(i-1) - 10\big) - \big(6(i-2) - 10\big) = 6\,i - 10 = p(i).$$