Soluzione della seconda prova parziale di Calcolo Numerico
27 Maggio 2015

Esercizio 1

(a) La matrice A ha un cerchio di Gerschgorin C_1 di centro n^2 e raggio $n-1$, un cerchio C_2 di centro 2 e raggio 1, un cerchio C_3 di centro 3 e raggio 1, ..., un cerchio C_{n-1} di centro $n-1$ e raggio 1. Il cerchio C_1 è disgiunto dall'unione U degli altri cerchi, quindi in esso ci sta un autovalore reale. Per $n \geq 3$ la matrice ha predominanza diagonale in senso stretto, quindi è non singolare.

(b) Il raggio spettrale di A coincide con l'autovalore che sta in C_1, quindi $n^2 - n + 1 \leq \rho(A) \leq n^2 + n - 1$, mentre $|\lambda|_{\min}$ coincide con il modulo di uno degli autovalori che stanno in U, ed è minore di $n^2 - n + 1$. Quindi $\alpha = n^2 - n + 1$ e $\beta = n^2 + n - 1$.

(c) Per $n = 3$ la matrice B ha un cerchio di Gerschgorin C_1 di centro 9 e raggio 5, un cerchio C_2 di centro 2 e raggio 1/2 e un cerchio C_3 di centro 3 e raggio 1/3. Quindi i tre cerchi sono disgiunti e i tre autovalori di B risultano tutti reali e distinti. Per $n > 3$ la situazione rimane la stessa: C_1 ha centro n^2 e raggio $2+3+\ldots+n-1 = n(n-1)/2-1$ e gli altri cerchi sono disgiunti fra di loro. Anche C_1 è disgiunto dagli altri, infatti il più vicino è quello con centro $n-1$ e raggio $1/(n-1)$ e non interseca C_1.

(d) Le matrici A e B sono simili per ogni n, quindi hanno gli stessi autovalori, tutti reali e distinti. Perciò A è diagonalizzabile.

Esercizio 2

(a) La matrice ha predominanza diagoale in senso stretto per $\alpha > 2$.

(a) La matrice ha predominanza diagonale in senso stretto per $|\alpha| > 2$.

(b) La matrice di iterazione del metodo di Jacobi è

$$J = \frac{1}{\alpha} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Il suo polinomio caratteristico è

$$p(J) = -\lambda^3 - \frac{3\lambda}{\alpha^2}.$$

J ha un autovalore reale $\lambda_1 = 0$ e due complessi coniugati $\lambda_2 = i\sqrt{3}/\alpha$ e $\lambda_3 = -\lambda_2$. È $\rho(J) = |\lambda_2| = \sqrt{3}/|\alpha|$ e $\rho(J) < 1$ per $|\alpha| > \sqrt{3}$. Quindi per $\sqrt{3} < |\alpha| \leq 2$ il metodo di Jacobi è convergente anche se la matrice A non ha predominanza diagonale in senso stretto.

(c) È
$$P=\begin{bmatrix}\alpha & 0 & 1\\ 0 & \alpha & 0\\ -1 & 0 & \alpha\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix}.$$
$$P=\frac{1}{\alpha+\alpha^3}\begin{bmatrix}\alpha^2 & 0 & -\alpha\\ 0 & 1+\alpha^2 & 0\\ \alpha & 0 & \alpha^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \dfrac{1+\alpha}{1+\alpha^2} & 0\\ -\dfrac{1}{\alpha} & 0 & \dfrac{1}{\alpha}\\ 0 & \dfrac{1-\alpha}{1+\alpha^2} & 0\end{bmatrix}.$$
Il polinomio caratteristico di P è
$$p(P)=\frac{-\lambda}{1+\alpha^2}\big((1+\alpha^2)\lambda^2+2\big).$$
P ha un autovalore reale $\lambda_1=0$ e due complessi coniugati $\lambda_2=i\sqrt{2}/\sqrt{1+\alpha^2}$ e $\lambda_3=-\lambda_2$. È $\rho(P)=|\lambda_2|=\sqrt{2}/\sqrt{1+\alpha^2}$ e $\rho(J)<1$ per $|\alpha|>1$. Per tali α il metodo converge.

Esercizio 3

(a) È $x_0=-2$, $x_1=0$, $x_2=1$, $f(x_0)=2$, $f(x_1)=0$, $f(x_2)=0$ e si ha
$$p(x)=\frac{1}{3}\,(x^2-x).$$

(b) È
$$r(x)=f(x)-p(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{3}\,(x^2+2x) & \text{per} \quad x<0\\[2ex] \dfrac{2}{3}\,(x^2-x) & \text{per} \quad x\geq 0\end{cases}$$
quindi $|r(x)|$ coincide con la parabola $-2(x^2+2x)/3$ per $-2\leq x\leq 0$ e coincide con la parabola $-2(x^2-x)/3$ per $0\leq x\leq 1$. Il massimo viene assunto dalla prima parabola nel punto di mezzo del primo intervallo, quindi vale $2/3$.