# Soluzione della prova scritta di Calcolo Numerico del 28 Giugno 2007

## Esercizio 1

**(a)** Indicata con $u$ la precisione di macchina si trova $|\varepsilon_{alg}| \leq \frac{3}{2}u$ per la prima espressione e $|\varepsilon_{alg}| \leq 3u$ per la seconda.

**(b)** Si trova $|\varepsilon_{alg}| \leq \frac{9}{4}u$ per la prima espressione e $|\varepsilon_{alg}| \leq 9u$ per la seconda.

**(c)** Si trova $|\varepsilon_{alg}| \leq \frac{21}{8}u$ per la prima espressione e $|\varepsilon_{alg}| \leq 21u$ per la seconda.

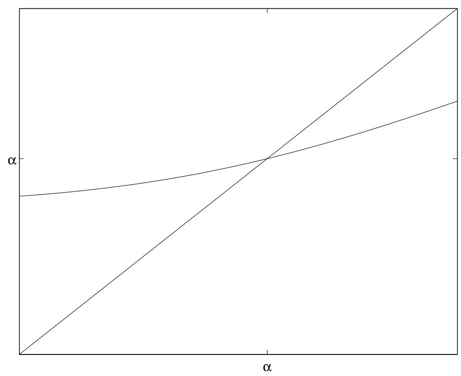
**(d)** Dai risultati precedenti risulta che il procedimento più stabile è il primo. In generale per tale procedimento si ha

$$|\varepsilon_{alg}| \leq (3 - \frac{3}{2^n})u,$$

ove $n$ è il numero di elevamenti al quadrato. L'errore algoritmico risulta quindi sempre limitato da $3u$. Comunque, nel caso $x > 1$ il procedimento porta rapidamente ad un overflow a causa dei successivi elevamenti al quadrato.

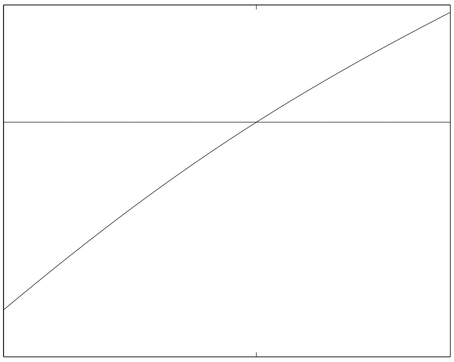
## Esercizio 2

**(a)** Il fatto che $0 < g'(x) < 1$ implica che si tratta di una funzione crescente ma che cresce più lentamente della bisettrice. Il fatto che $g''(x) > 0$ implica che la concavità è rivolta verso l'alto. Un grafico indicativo è il seguente




**(b)** Il metodo risulta convergente ad $\alpha$ per ogni $x_0 \in \mathbf{R}$, infatti il teorema del punto fisso può essere applicato ad ogni intervallo chiuso e limitato centrato in $\alpha$. Avendosi $g'(\alpha) \neq 0$ l'ordine di convergenza è 1.

**(c)** Risulta $f'(x) = 1 - g'(x) > 0$ e $f''(x) = -g''(x) < 0$ su tutto $\mathbf{R}$. Dunque $f(x)$ è una funzione crescente che volge la concavità verso il basso. Un grafico indicativo è il seguente




**(d)** Per $x_0 < \alpha$ la convergenza è garantita dal teorema di convergenza in largo. Se $x_0 > \alpha$ si osserva che $x_1 < \alpha$ e quindi vi è comunque convergenza. Avendosi $f'(\alpha) \neq 0 \neq f''(\alpha)$ la convergenza è del secondo ordine .

## Esercizio 3

Si ha

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 6 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 6 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 6 \end{pmatrix}.$$

**(a)** La matrice $B$ è simmetrica, quindi i suoi autovalori sono reali. Inoltre ha predominanza diagonale in senso stretto e i suoi elementi principali sono positivi, quindi per il teorema di Gerschgorin i suoi autovalori sono positivi.

**(b)** La matrice $A$ ha rango 1 avendo una sola colonna linearmente indipendente. Dunque l'autovalore 0 ha molteplicità almeno 3. Siccome la traccia della matrice è 4 ed è pari alla somma degli autovalori, ne segue che il quarto autovalore è uguale a 4.

**(c)** Siccome $B = 5I + A$ gli autovalori di $B$ si possono ottenere sommando 5 a quelli di $A$. Dunque $B$ ha tre autovalori uguali a 5 e un autovalore uguale a 9.

**(d)** $B$ è non singolare, quindi il sistema è risolubile. Inoltre $B$ ha predominanza diagonale stretta, quindi il metodo di Jacobi è convergente.

## Esercizio 4

**(a)** Si trova $p(x) = 2x^2 - 1$ e $q(x) = 2x - 1$.

**(b)** Risulta

$$\begin{aligned}
t(-1) &= \alpha(-1)p(-1) + (1 - \alpha(-1))q(-1) = 1 \cdot 1 + 0 \cdot q(-1) = 1, \\
t(0) &= \alpha(0)p(0) + (1 - \alpha(0))q(0) = q(0) = -1, \\
t(1) &= \alpha(1)p(1) + (1 - \alpha(1))q(1) = q(1) = 1, \\
t(2) &= \alpha(2)p(2) + (1 - \alpha(2))q(2) = 0 \cdot 1 + 1 \cdot q(2) = 3.
\end{aligned}$$

Poichè $t(x)$ ha grado non superiore a 3 e passa per i 4 punti, per il teorema di unicità deve trattarsi del polinomio di interpolazione.

**(c)** Dato che per $i = 1, 2$ risulta $p(x_i) = q(x_i)$, basta imporre che $t(x_0) = p(x_0)$ e che $t(x_3) = q(x_3)$, cioè che $\alpha(x_0) = 1$ e $\alpha(x_3) = 0$. Si trova $a = -1/(x_3 - x_0)$ e $b = x_3/(x_3 - x_0)$.