Soluzione della prova scritta
di Calcolo Numerico del 29/1/2013

Esercizio 1

(1) L'errore inerente è dato da

$$\epsilon_{in} = c_x \epsilon_x, \quad \text{dove} \quad c_x = \frac{x^2 + x}{1 + x + x^2/2}.$$

c_x è limitato in modulo per ogni x. In particolare per x piccolo c_x è vicino a 0, ad esempio per $|x| \leq 1$ è $|c_x| \leq 0.8$. Ne segue il buon condizionamento del calcolo della $t(x)$. L'errore algoritmico è

$$\epsilon_{\text{alg}} = \epsilon^{(3)} + \frac{1 + x}{t(x)} \epsilon^{(1)} + \frac{x^2}{2t(x)} \epsilon^{(2)},$$

dove $\epsilon^{(1)}$ e $\epsilon^{(3)}$ sono gli errori locali delle due addizioni e $\epsilon^{(2)}$ è l'errore locale del calcolo di x^2. Maggiorando in modulo gli errori locali con u si ha

$$|\epsilon_{\text{alg}}| < u\Big(1 + \frac{|1 + x| + x^2/2}{|t(x)|}\Big).$$

Per $|x| \leq 1$ è $|t(x)| = t(x)$ e $|1 + x| + x^2/2 = 1 + x + x^2/2$, quindi $|\epsilon_{\text{alg}}| < 2u$. Ne segue la stabilità del calcolo della $t(x)$.

(2) Scrivendo il resto della formula di Taylor nella forma di Lagrange si ha

$$|f(x) - t(x)| \leq \frac{x^3}{3!} f^{(3)}(\xi) = \frac{x^3}{3!} \mathrm{e}^{\xi}, \quad \text{dove} \quad 0 < \xi < x.$$

Per $|x| \leq 1$ è $|f(x) - t(x)| \leq \mathrm{e}/6 \sim 0.453$.

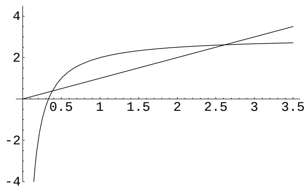
Esercizio 2

(1) I metodi sono tutti della forma $x_{i+1} = g(x_i)$. Per ciascuno di essi si cercano i punti fissi, e si trova che in ogni caso i punti fissi sono le soluzioni dell'equazione di secondo grado $x^2 - bx + 1 = 0$, cioè

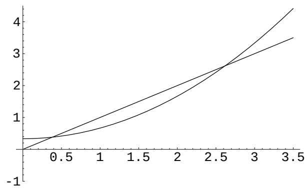
$$\alpha = \frac{b - \sqrt{b^2 - 4}}{2}, \quad \beta = \frac{b + \sqrt{b^2 - 4}}{2}.$$

Se $b > 2$ le soluzioni sono reali, positive e distinte, se $b = 2$ le due soluzioni coincidono e $\alpha = 1$. Non vi sono altri valori positivi di b per cui le soluzioni sono reali. Se i metodi iterativi convergono, i limiti delle successioni generate dovranno essere α o β.

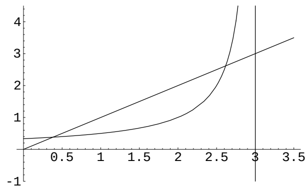
(2) Si disegnano i grafici di $y = x$ e $y = g(x)$ per i tre metodi per un valore di $b > 2$ (la linea verticale nel grafico del metodo c) indica un asintoto).



metodo a)



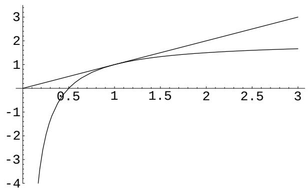
metodo b)



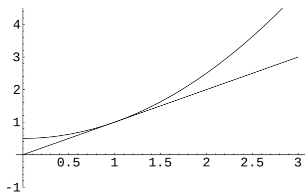
metodo c)

Restringendo l'analisi di convergenza al solo semiasse positivo, il metodo a) risulta convergente alla soluzione β se $x_0 > \alpha$. I metodi b) e c) risultano convergenti alla soluzione α se $0 < x_0 < \beta$. L'ordine di convergenza è in ogni caso 1.

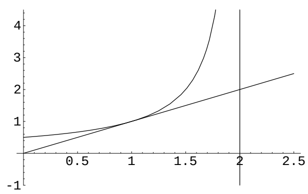
Per $b = 2$ si ha



metodo a)



metodo b)



metodo c)

Il metodo a) risulta convergente all'unica soluzione $\alpha = 1$ se $x_0 > \alpha$. I metodi b) e c) risultano convergenti all'unica soluzione α se $0 < x_0 < \alpha$. In ogni caso la convergenza è sublineare.

Esercizio 3

(1) In norma 1 si ha

$$|\alpha| = \Big| \sum_{i=1}^{n} u_i v_i \Big| \leq \sum_{i=1}^{n} |u_i|\,|v_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |u_i| \sum_{i=1}^{n} |v_i| = \|\boldsymbol{u}\|_1 \cdot \|\boldsymbol{v}\|_1,$$

quindi la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz vale. Per verificare che la disuguaglianza non vale in norma ∞, basta trovare un controesempio:

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} = [1, 1, \ldots, 1], \quad \|\boldsymbol{u}\|_\infty = \|\boldsymbol{v}\|_\infty = 1, \quad \alpha = n, \quad \|\boldsymbol{u}\|_\infty \cdot \|\boldsymbol{v}\|_\infty = 1.$$

(2) La matrice $A = \boldsymbol{u}\,\boldsymbol{v}^T$ ha una sola riga linearmente indipendente, quindi l'autovalore nullo con molteplicità almeno $n-1$. Ha poi un altro autovalore che soddisfa la relazione

$$\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{x} = \lambda\,\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0},$$

da cui si ricava che $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u}$ e $\lambda = \boldsymbol{v}^T\boldsymbol{u} = \alpha \neq 0$.

(3) La matrice di iterazione del metodo è $P = (I + A)/3$, e si ha

$$\|P\|_1 = \frac{1}{3}\,\|I + A\|_1 \le \frac{1}{3}\big(\|I\|_1 + \|A\|_1\big) \le \frac{1}{3}\big(1 + \|\boldsymbol{u}\|_1\,\|\boldsymbol{v}\|_1\big).$$

Se si sfruttano le relazioni trovate, si ha che la matrice $I + A$ ha l'autovalore 1 con molteplicità $n - 1$ e l'autovalore $1 + \alpha$ con molteplicità 1. Quindi $\rho(P) = \max\{1/3, |1 + \alpha|/3\}$ e vi è convergenza se $-4 < \alpha < 2$. Per il punto (1) condizione sufficiente di convergenza è che $\|\boldsymbol{u}\|_1 \cdot \|\boldsymbol{v}\|_1 < 2$.

Esercizio 4

a) È $f(x_0) = 1/\mathrm{e}$, $f(x_1) = 1$, $f(x_2) = \mathrm{e}$. Il polinomio di interpolazione risulta

$$p(x) = \frac{(\mathrm{e}-1)^2}{2\mathrm{e}}\,x^2 + \frac{\mathrm{e}^2-1}{2\mathrm{e}}\,x + 1 \sim 0.543\,x^2 + 1.1752\,x + 1.$$

(b) Il resto è

$$r(x) = \pi(x)\,\frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}, \quad \text{dove} \quad \pi(x) = x(x^2-1), \quad \xi \in \big(-1, 1\big).$$

Si ha

$$\pi'(x) = 3x^2 - 1 \quad \text{e} \quad \pi'(x) = 0 \text{ per } \overline{x} = \pm\sqrt{3}/3.$$

Quindi per $|x| \le 1$ è

$$|\pi(x)| \le |\pi(\overline{x})| = \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

e

$$|r(x)| \le \frac{2\sqrt{3}}{9}\,\frac{\mathrm{e}}{6} \sim 0.17.$$

Confrontando con la maggiorazione del resto ottenuta al primo esercizio, si nota che per $|x| \le 1$ il polinomio di interpolazione è più accurato del polinomio di Taylor dello stesso grado. Ciò è dovuto al fatto che il polinomio di Taylor dà un'approssimazione della $f(x)$ molto buona in intorni piccoli dello zero, ma progressivamente peggiore quando ci si allontana da zero, mentre il polinomio di interpolazione dà un'approssimazione mediamente più uniforme su tutto l'intervallo $[-1, 1]$. Infatti per $|x| \le 0.5$ la maggiorazione di $|r(x)|$ resta quasi la stessa, mentre $|f(x) - t(x)| \le (0.5)^3\mathrm{e}^{0.5}/6 \sim 0.035$.