Soluzione della prima prova parziale di Calcolo Numerico
29 Novembre 2010

Compito A

Esercizio 1

È

$$a = \frac{1}{10} = 2^{-3}\ 0.\overline{1100}_2, \qquad b = \frac{1}{9} = 2^{-3}\ 0.\overline{111000}_2.$$

(a) Operando con 5 cifre significative e troncamento si ha

$$\widetilde{a} = 2^{-3}\,0.11001_2, \quad \widetilde{b} = 2^{-3}\,0.11100_2, \quad \widetilde{x} = \frac{\widetilde{a}+\widetilde{b}}{2} = 2^{-3}\,0.11010_2 = \frac{13}{128}.$$

Quindi $b - \widetilde{x} = 11/1152$ e $\widetilde{x} - a = 1/640$, per cui $\widetilde{x}$ è più vicino ad a.

(b) Operando con 5 cifre significative e arrotondamento si ha

$$\widetilde{a} = 2^{-3}\,0.11010_2, \quad \widetilde{b} = 2^{-3}\,0.11100_2, \quad \widetilde{x} = \frac{\widetilde{a}+\widetilde{b}}{2} = 2^{-3}\,0.11011_2 = \frac{27}{256}.$$

Quindi $b - \widetilde{x} = 13/2304$ e $\widetilde{x} - a = 7/1280$, per cui $\widetilde{x}$ è ancora più vicino ad a.

Esercizio 2

(a) Il coefficiente di amplificazione di $f(x)$ è

$$c_x = \frac{x\cos x}{\sin x}.$$

Per $-\pi/2 \le x \le \pi/2$ è $|c_x| \le x/\sin x \le \pi/2$, quindi il condizionamento è limitato nell'intorno dello zero. Invece il condizionamento non è superiormente limitabile per x nell'intorno destro di $-\pi$ e sinistro di π.

(b) Per il primo algoritmo l'errore algoritmico è quello locale del calcolo di $\sin x$, e quindi è maggiorato in modulo dalla precisione di macchina. Quindi il primo algoritmo è stabile. Per il secondo algoritmo si ha

$$\epsilon_{\text{alg}} = \epsilon^{(4)} + \frac{1}{2}\,\epsilon^{(3)} - \frac{\cos^2 x}{2\sin^2 x}\,\left(\epsilon^{(2)} + 2\epsilon^{(1)}\right).$$

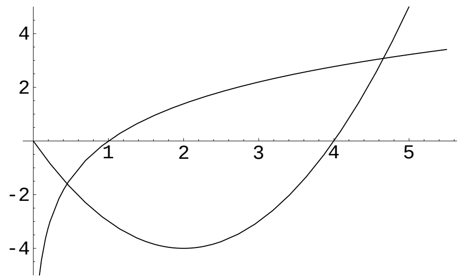
dove $\epsilon^{(1)}$ è l'errore locale del calcolo di $\cos x$, $\epsilon^{(2)}$ e $\epsilon^{(3)}$ sono gli errori locali del quadrato e della sottrazione da 1 e $\epsilon^{(4)}$ è l'errore locale della radice. Maggiorando in modulo gli errori locali con u si ha

$$|\epsilon_{\text{alg}}| < \frac{3u}{2}\left(1 + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\right).$$

Quindi il secondo algoritmo non è stabile sia nell'intorno dello zero che negli intorni in cui il problema è malcondizionato.

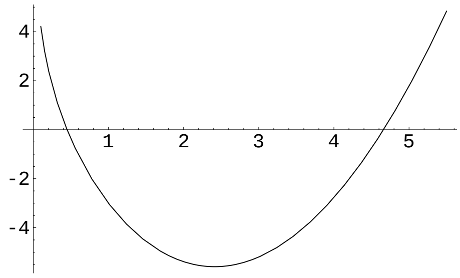
Esercizio 3

(a) L'equazione $f(x) = 0$ può essere scritta anche nella forma $x^2 - 4x = 2\log x$. Dal grafico delle due funzioni $f_1(x) = x^2 - 4x$ e $f_2(x) = 2\log x$



risulta evidente che vi sono due soluzioni $\alpha \in (0, 1)$ e $\beta \in (4, 5)$.

(b) È $f'(x) = 2x - 4 - 2/x$ e $f''(x) = 2 + 2/x^2$. Quindi per $x > 0$ risulta $f'(x) = 0$ nel punto $x_m = 1 + \sqrt{2}$, mentre $f''(x) > 0$ per ogni x. Quindi il grafico della $f(x)$ è



Il metodo delle tangenti converge monotonicamente ad α per $0 < x_0 < \alpha$ e a β per $x_0 > \beta$. Inoltre converge a β per $x_0 > x_m$ e ad α per $x_0 \in (\alpha, \gamma)$, dove γ è tale che $\gamma - f(\gamma)/f'(\gamma) = 0$ (cioé γ è il punto in cui la tangente alla $f(x)$ interseca l'asse delle ascisse nell'origine). Ad esempio, se scegliamo $x_0 = 1$, si ottiene $x_1 = 1/4$, quindi γ è un punto maggiore di 1. L'ordine è 2 per entrambe le soluzioni.

(c) Le due equazioni $x = g(x)$ e $f(x) = 0$ sono equivalenti perché hanno le stesse soluzioni con la stessa molteplicità. Infatti non vi sono soluzioni che annullino il denominatore $x - 2$.

(d) La funzione $g(x)$ ha un asintoto verticale in $x = 2$ e in entrambi gli intervalli di separazione la funzione $g(x)$ è decrescente. Nella soluzione α è

$$g'(\alpha) = \frac{2}{\alpha(\alpha - 2)} - \frac{4 + 2\log\alpha}{(\alpha - 2)^2} = \frac{2}{\alpha(\alpha - 2)} - 1.$$

Poiché $\alpha < 1$ è $\alpha - 2 < 0$. Quindi la frazione è negativa e $g'(\alpha) < -1$. Il punto α è repulsivo e non vi è convergenza locale ad α. In modo analogo si ha $g'(\beta) = 2/(\beta(\beta - 2)) - 1$, e poiché $4 < \beta < 5$ è $2/15 < 2/(\beta(\beta - 2)) < 1/4$, per cui $|g'(\beta)| < 1 - 2/15$. Ne segue che il metodo converge localmente a β. L'ordine di convergenza è 1.

Compito B

Lo svolgimento è sostanzialmente uguale a quello del compito A, va solo notato che nell'esercizio 3 la soluzione β appartiene all'intervallo $(1, 2)$.