Soluzione della prima prova parziale di Calcolo Numerico
3 Novembre 2011

Compito A

Esercizio 1

È

$$x = \frac{3}{7} = 2^{-1}\ 0.\overline{110}_2.$$

Operando con 5 cifre significative e troncamento si ha $\widetilde{x} = 2^{-1}\ 0.11011_2$, $\widetilde{y} = 1/\widetilde{x} = 10.010_2$, $\widetilde{z} = fl(1-\widetilde{y}) = -1.0100_2$, $fl(\widetilde{x}\,\widetilde{z}) = -0.10000_2$. Mentre $fl(\widetilde{x}-1) = -0.10010_2$. Quindi la proprietà non vale. Il secondo risultato dà l'approssimazione in $\mathcal{F}_{(2,5,m,M)}$ del risultato esatto.

Esercizio 2

(a) Il coefficiente di amplificazione di $f(x)$ è

$$c_x = \frac{2x(x+\sqrt{1-x^2})^2}{(2x^2-1)\sqrt{1-x^2}}.$$

Il denominatore si annulla per $x = \pm 1$ e $x = \pm 1/\sqrt{2}$, il numeratore si annulla per $x = 0$ e $x = -1/\sqrt{2}$ (radice doppia). Quindi si ha

$$\lim_{x\to -1^+} |c_x| = \lim_{x\to 1^-} |c_x| = \lim_{x\to 1/\sqrt{2}} |c_x| = \infty,$$

mentre

$$\lim_{x\to 0} |c_x| = \lim_{x\to -1/\sqrt{2}} |c_x| = 0.$$

Quindi il condizionamento non è superiormente limitabile per x nell'intorno di $1/\sqrt{2}$, nell'intorno destro di -1 e sinistro di 1.

(b) Per il primo algoritmo si ha

$$\epsilon_{\text{alg}}^{(1)} = \epsilon^{(5)} + 2\epsilon^{(4)} - \frac{2\sqrt{1-x^2}}{x-\sqrt{1-x^2}}\left(\epsilon^{(3)} + \frac{\epsilon^{(2)}}{2}\right) + \frac{x^2\epsilon^{(1)}}{\sqrt{1-x^2}(x-\sqrt{1-x^2})}$$

dove $\epsilon^{(1)}$ è l'errore locale del calcolo di x^2, $\epsilon^{(2)}$ e $\epsilon^{(3)}$ sono gli errori locali della prima sottrazione e della radice quadrata, $\epsilon^{(4)}$ e $\epsilon^{(5)}$ sono gli errori locali della seconda sottrazione e del quadrato finale. Maggiorando in modulo gli errori locali con u si ha

$$|\epsilon_{\text{alg}}^{(1)}| < u\Big(3 + \frac{3\sqrt{1-x^2}}{|x-\sqrt{1-x^2}|} + \frac{x^2}{|x-\sqrt{1-x^2}|\sqrt{1-x^2}}\Big).$$

Quindi il primo algoritmo non è stabile negli intorni in cui il problema è malcondizionato.

Per il secondo algoritmo si ha

$$\epsilon_{\text{alg}}^{(2)} = \epsilon^{(5)} - \frac{2x\sqrt{1-x^2}}{1-2x\sqrt{1-x^2}}\left(\epsilon^{(4)} + \epsilon^{(3)} + \frac{\epsilon^{(2)}}{2}\right) + \frac{2x^3\epsilon^{(1)}}{\sqrt{1-x^2}(1-2x\sqrt{1-x^2})}$$

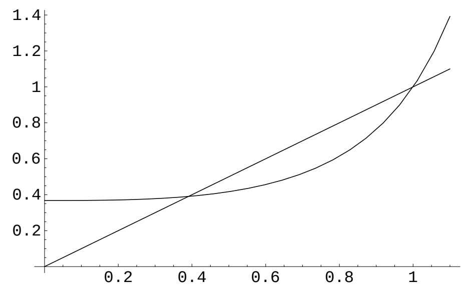
dove $\epsilon^{(1)}$ e $\epsilon^{(2)}$ sono gli errori locali del calcolo di x^2 e di $1-x^2$, $\epsilon^{(3)}$ è l'errore locale della radice quadrata, $\epsilon^{(4)}$ e $\epsilon^{(5)}$ sono gli errori locali del prodotto per $2x$ e della sottrazione finale. Maggiorando in modulo gli errori locali con u si ha

$$|\epsilon^{(2)}_{\text{alg}}| < u\Big(1 + \frac{5|x|\sqrt{1-x^2}}{|f(x)|} + \frac{2|x^3|}{|f(x)|\sqrt{1-x^2}}\Big).$$

Quindi anche il secondo algoritmo non è stabile negli intorni in cui il problema è malcondizionato.

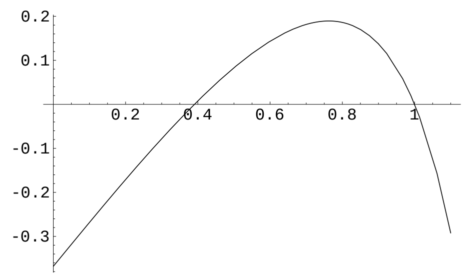
Esercizio 3

(a) L'equazione $x = g(x)$ ha evidentemente la soluzione $\beta = 1$. Non vi possono essere soluzioni negative perché $g(x) > 0$ per ogni x. Dal grafico delle due funzioni $y = x$ e $y = g(x)$



risulta che vi anche un'altra soluzione $\alpha \in (0, 0.5)$.

(b) Per studiare la convergenza del metodo delle tangenti si disegna il grafico della $f(x) = x - g(x)$.



È $f'(x) = 1 - 3\,x^2\,\mathrm{e}^{x^3-1}$ e $f''(x) = -3x\,(2+3\,x^3)\,\mathrm{e}^{x^3-1}$. Vi sono solo due punti di flesso 0 e $-\sqrt[3]{2/3}$, perciò non vi sono punti di flesso per $x > 0$. Ne segue che nell'intervallo $[0,1]$ vi può essere un solo punto stazionario (di massimo). Indicato con x_m tale punto, vi è convergenza del metodo delle tangenti ad α per $0 < x_0 < \alpha$ e a β per $x_0 > \beta$. Vi è convergenza a β anche per $x_m < x_0 < \beta$, mentre non si è in grado di dire nulla sulla eventuale convergenza ad α per $\alpha < x_0 < x_m$ basandosi solo sul grafico fatto. L'ordine di convergenza è 2 per entrambe le soluzioni.

(c) Dal primo grafico risulta evidente che il metodo iterativo $x_{i+1} = g(x_i)$ converge ad α per $0 < x_0 < \beta$ e che diverge per $x_0 > \beta$. In realtà il metodo converge ad α anche per ogni $x_0 \leq 0$ perché $0 < g'(x) < 1$ per ogni $x \leq 0$. L'ordine di convergenza è 1.

Compito B

Lo svolgimento è sostanzialmente uguale a quello del compito A, va solo notato che nell'esercizio 3(c) il metodo iterativo converge ad α per $|x_0| < 1$.