Soluzione della prova scritta
di Calcolo Numerico del 3/7/2012

Esercizio 1

Il coefficiente di amplificazione di $f(x)$ è

$$c_x = \frac{\sqrt{x}(x-1)}{2(1+\sqrt{x})^2(2x-1-\sqrt{x})} = \frac{\sqrt{x}}{2(2\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}}{2+6\sqrt{x}+4x}.$$

Nell'intervallo considerto il denominatore non si annulla mai e si ha $1/12 < c_x < (5\sqrt{2}-6)/14$. Quindi il problema è ben condizionato per ogni $x \in [1,2]$. Facendo il grafo si trova che

$$\epsilon_{alg} = \epsilon^{(5)} - \epsilon^{(3)} + \epsilon^{(4)} + \frac{2x-1}{2x-1-\sqrt{x}}\,\epsilon^{(1)} + \frac{\sqrt{x}}{2x-1-\sqrt{x}}\,\epsilon^{(2)}$$

dove $\epsilon^{(1)}$ è l'errore locale del calcolo di $2x-1$, $\epsilon^{(2)}$ è l'errore locale del calcolo di $\sqrt{x}$, $\epsilon^{(3)}$ è l'errore locale del calcolo di $x-1$, $\epsilon^{(4)}$ è l'errore locale del calcolo di $(2x-1)-\sqrt{x}$, $\epsilon^{(5)}$ è l'errore locale dell'ultima divisione. Maggiorando in modulo gli errori locali con u si ha per $x \in (1,2]$

$$|\epsilon_{alg}| < u\Big(3 + \frac{2x-1+\sqrt{x}}{|2x-1-\sqrt{x}|}\Big).$$

Quindi nell'intervallo l'errore algoritmico è limitabile in modulo all'esterno di un intorno destro di 1, ma non all'interno dell'intorno.

Esercizio 2

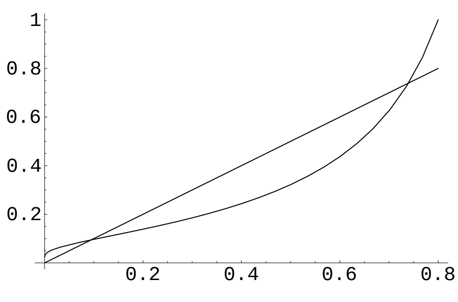
Le due equazioni

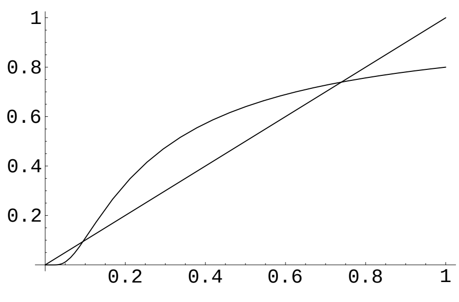
$$x = \frac{\log 0.8}{\log x}, \qquad x = 0.8^{\,1/x}$$

sono equivalenti. Infatti in entrambi i casi le soluzioni possono essere solo positive e dalla prima si ha

$$\log x = \frac{\log 0.8}{x} = \log\big(0.8^{\,1/x}\big).$$

A sinistra i grafici di $y = x$ e $y = g(x)$, a destra i grafici di $y = x$ e $y = h(x)$.





Vi sono quindi due soluzioni $0 < \alpha < 1/\mathrm{e}$ e $1/\mathrm{e} < \beta < 1$. Dai grafici si vede che $0 < g'(\alpha) < 1$, $g'(\beta) > 1$, $h'(\alpha) > 1$ e $0 < h'(\beta) < 1$. Perciò α è punto attrattivo per il primo metodo e repulsivo per il secondo, e, viceversa, α è punto repulsivo per il primo metodo e attrattivo per il secondo. Per determinare il punto iniziale da scegliere, per il primo metodo si nota che per ogni x_0 tale che $\alpha < x_0 < \beta$ si ha $\alpha < x_1 < x_0$ e per ogni x_0 tale che $0 < x_0 < \alpha$ si ha $x_0 < x_1 < \alpha$. Quindi si può scegliere per x_0 un qualunque punto compreso fra 0 e β, estremi esclusi, ottenendo una successione monotona convergente di ordine 1.

Considerazioni analoghe portano a dire che per il secondo metodo si può scegliere per x_0 un qualunque punto maggiore di α, ottenendo una successione monotona convergente di ordine 1.

Esercizio 3

Scriviamo il metodo iterativo nella forma

$$\boldsymbol{x}_{i+1} = P\,\boldsymbol{x}_i + \boldsymbol{q}, \quad \text{dove} \quad P = I + \frac{1}{\omega}A \quad \text{e} \qquad \boldsymbol{q} = -\frac{1}{\omega}\boldsymbol{b}.$$

Il polinomio caratteristico di A è

$$p(\lambda) = -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 23\lambda + 15 = (1-\lambda)(3-\lambda)(5-\lambda).$$

Quindi gli autovalori di A sono 1, 3, 5 e gli autovalori di P sono

$$\mu_1 = 1 + \frac{1}{\omega}, \quad \mu_2 = 1 + \frac{3}{\omega}, \quad \mu_3 = 1 + \frac{5}{\omega}.$$

Per $\omega \geq 0$ i tre autovalori sono ≥ 1, quindi il metodo non può essere convergente. Per $\omega < 0$ si ha $|\mu_1| < 1$ per $\omega < -1/2$, $|\mu_2| < 1$ per $\omega < -3/2$, $|\mu_3| < 1$ per $\omega < -5/2$. Quindi il metodo iterativo è convergente Per $\omega < -5/2$.

Esercizio 4

Il polinomio $p(x)$ in effetti passa per i tre punti assegnati, ma non è il polinomio di interpolazione di nessuna funzione $f(x)$, perché anche il polinomio $q(x)$ identicamente nullo, quindi di grado minore di 2, passa per gli stessi punti. Cioè qualunque funzione $f(x)$ che passasse per gli stessi punti avrebbe $q(x)$ come polinomio di interpolazione. Se $f(x)$ è identicamente nulla, si ha $err(x) = f(x) - p(x) = p(x)$ e $p'(x) = 3x^2 - 6x + 2$. La derivata si annulla nei due punti $x_1 = 1 - \sqrt{3}/3$ e $x_2 = 1 + \sqrt{3}/3$. Si ha $|p(x_1)| = |p(x_2)| = 2\sqrt{3}/9$. Quindi $\max_{x\in[0,2]} |err(x)| = 2\sqrt{3}/9$.