Soluzione della prova scritta di Calcolo Numerico del 3/7/2013

Esercizio 1

L'errore inerente è dato da

$$\epsilon_{in} = c_x \epsilon_x, \quad \text{dove} \quad c_x = \frac{3x}{x+1}\,.$$

c_x è limitato in un intorno sinistro di 0 ma non è limitato in un intorno destro di -1, poiché $\lim_{x\to -1_+} |c_x| = +\infty$. Dunque il calcolo di $f(x)$ è mal condizionato per x vicino a -1.

L'errore algoritmico del primo algoritmo è

$$\epsilon_{\mathrm{alg}_1} = \epsilon^{(3)} + \epsilon^{(2)} + 3\epsilon^{(1)},$$

dove $\epsilon^{(1)}$ è l'errore locale del calcolo di $x+1$ e $\epsilon^{(2)}$ e $\epsilon^{(3)}$ sono gli errori locali del calcolo delle successive potenze. Pertanto

$$|\epsilon_{\mathrm{alg}_1}| < 5u,$$

e il primo algoritmo risulta stabile per ogni valore di x nell'intervallo assegnato.

L'errore algoritmico del secondo algoritmo è

$$\epsilon_{\mathrm{alg}_2} = \epsilon^{(5)} + \frac{\big((x+3)x+3\big)x}{(x+1)^3}\Big(\epsilon^{(4)} + \epsilon^{(3)} + \frac{(x+3)x^2}{(x+3)x+3}\big(\epsilon^{(2)} + \epsilon^{(1)}\big)\Big),$$

dove $\epsilon^{(1)}$ è l'errore locale del calcolo di $x+3$ e gli altri $\epsilon^{(i)}$, per $i = 2, \ldots, 5$ sono errori locali di moltiplicazioni e di addizioni, alternativamente. Quindi

$$|\epsilon_{\mathrm{alg}_2}| < u\Big(1 + 2\Big|\frac{\big((x+3)x+3\big)x}{(x+1)^3}\Big| + 2\Big|\frac{(x+3)x^2}{(x+1)^3}\Big|\Big).$$

Nell'intervallo considerato è $x < 0$ e $x+1 > 0$, e $((x+3)x+3)x = (x+1)^3 - 1 < 0$, si ha

$$|\epsilon_{\mathrm{alg}_2}| < u\Big(1 + \frac{2}{|x+1|^3}\big(-\big((x+3)x+3\big)x + (x+3)x^2\big)\Big) = u\Big(1 + \frac{6|x|}{|x+1|^3}\Big).$$

Il secondo algoritmo è instabile in un intorno destro di -1. Per x in un intorno sinistro dello 0 è $|x| \sim 0$ e $|x+1|^3 \sim 1$ e la maggiorazione del secondo algoritmo risulta inferiore a quella del primo. Nella zona intermedia è comunque preferibile usare il primo algoritmo.

Esercizio 2

a) Poiché $1+k \neq 0$, l'equazione $x = g(x)$ è equivalente alla

$$(1+k)\,x = \mathrm{e}^{-x} + k\,x, \quad \text{cioè alla} \quad x = \mathrm{e}^{-x},$$

che non dipende da k. Per $x \leq 0$ il primo membro è negativo e il secondo è positivo, quindi non vi sono soluzioni negative. Per $0 < x < 1/2$ il primo membro è minore di $1/2$ e il secondo è maggiore di $\mathrm{e}^{-1/2} = 1/\sqrt{\mathrm{e}} > 1/2$, quindi non vi sono soluzioni comprese fra 0 e $1/2$. Per $x > 1$ il primo membro è maggiore di 1 e il secondo è minore di $\mathrm{e}^{-1} = 1/\mathrm{e} < 1$, quindi non vi sono soluzioni maggiori di 1. Nell'intervallo indicato le due curve $y = x$ e $y = \mathrm{e}^{-x}$ si incrociano una volta sola.

b) Sia α la soluzione. È $\mathrm{e}^{-\alpha} = \alpha$, quindi

$$g'(x) = \frac{-\mathrm{e}^{-x} + k}{1+k} \quad \text{e} \quad g'(\alpha) = \frac{-\alpha + k}{1+k}.$$

Se $k = \alpha$ è $g'(\alpha) = 0$, se $0 \leq k < \alpha$ è $g'(\alpha) < 0$ e la condizione sufficiente di convergenza locale risulta $\alpha - k < 1 + k$, se $k > \alpha$ è $g'(\alpha) > 0$ e la condizione sufficiente di convergenza locale risulta $k - \alpha < 1 + k$. Quindi le condizioni di convergenza sono verificate in ogni caso. Se $k = \alpha$ l'ordine di convergenza sarebbe 2, altrimenti 1.

c) Nel caso $k = 0$ è $g'(\alpha) = -\alpha < 0$. La convergenza è alternata. Assumendo $x_0 = 1$ si ha $x_1 = \mathrm{e}^{-1} \sim 0.3679$ che non appartiene all'intervallo $[1/2, 1]$, ma $x_2 = \mathrm{e}^{-0.3679} \sim 0.6922$. Quindi il metodo converge a partire da $x_0 = 1$ con ordine 1.

Nel caso $k = 1$ è $g'(\alpha) = (1-\alpha)/2 > 0$. La convergenza è monotona. Assumendo $x_0 = 1$ si ha $x_1 = (1 + \mathrm{e}^{-1})/2 \sim 0.684$. Quindi il metodo converge a partire da $x_0 = 1$ con ordine 1.

Esercizio 3

È

$$\|\boldsymbol{x}\| = |x_1 - x_2| + \|\boldsymbol{x}\|_\infty \geq 0 \quad \text{per ogni} \quad \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n,$$

e

$$\|\boldsymbol{x}\| = |x_1 - x_2| + \|\boldsymbol{x}\|_\infty = 0 \text{ se e solo se } |x_1 - x_2| = 0 \text{ e } \|\boldsymbol{x}\|_\infty = 0, \text{ cioè } \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0},$$

$$\|\alpha\boldsymbol{x}\| = |\alpha(x_1 - x_2)| + \|\alpha\boldsymbol{x}\|_\infty = |\alpha|\left(|x_1 - x_2| + \|\boldsymbol{x}\|_\infty\right) = |\alpha|\,\|\boldsymbol{x}\|,$$

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| = |x_1+y_1-x_2-y_2| + \|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_\infty \leq |x_1-x_2| + |y_1-y_2| + \|\boldsymbol{x}\|_\infty + \|\boldsymbol{y}\|_\infty = \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|.$$

Nel caso $n = 2$ si ha $\|\boldsymbol{x}\| = |x_1 - x_2| + \max\{|x_1|, |x_2|\}$.

Nel primo quadrante

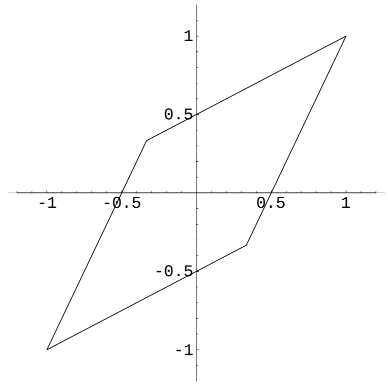
se $x_1 \geq x_2$ è $\|\boldsymbol{x}\| = 2x_1 - x_2 = 1$ per $x_2 = 2x_1 - 1$,

se $x_1 \leq x_2$ è $\|\boldsymbol{x}\| = 2x_2 - x_1 = 1$ per $x_2 = (x_1 + 1)/2$, Nel secondo quadrante

se $-x_1 \geq x_2$ è $\|\boldsymbol{x}\| = x_2 - 2x_1 = 1$ per $x_2 = 2x_1 + 1$,

se $-x_1 \leq x_2$ è $\|\boldsymbol{x}\| = x_1 - 2x_2 = 1$ per $x_2 = (x_1 - 1)/2$.

Negli altri quadranti si opera in modo analogo, o si sfruttano le simmetrie. La figura che risulta è la seguente



Esercizio 4

La matrice A non ha predominanza diagonale, quindi non si può utilizzare la condizione sufficiente di convergenza del metodo di Gauss-Seidel basata sulla predominanza. Costruiamo quindi la matrice di iterazione di Gauss-Seidel

$$G = (D - B)^{-1}C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/4 & 1 & 0 & 0 \\ 1/16 & -1/4 & 1 & 0 \\ -1/64 & 1/16 & -1/4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1/4 & -3/4 & -3/4 \\ 0 & -1/16 & 3/16 & -13/16 \\ 0 & 1/64 & -3/64 & 13/64 \end{bmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico di questa matrice è

$$p(\lambda) = \det(G - \lambda I) = \lambda^4 - \frac{41}{64}\lambda^3 + \frac{1}{16}\lambda^2.$$

Gli autovalori di G sono $\lambda_{1,2} = 0$, $\lambda_3 = \dfrac{41 - 3\sqrt{73}}{128}$, $\lambda_4 = \dfrac{41 + 3\sqrt{73}}{128}$. Fra λ_3 e λ_4, quello di massimo modulo è $\lambda_4 \sim 0.52$. Quindi il metodo di Gauss-Seidel è convergente.