Soluzione della prova scritta
di Calcolo Numerico del 3/9/2008

Esercizio 1

(a) Poiché $a^2 > b$ l'equazione $x^2 - 2ax + b = 0$ ha sempre due soluzioni distinte

$$\alpha_1 = a - \sqrt{a^2 - b}, \qquad \alpha_2 = a + \sqrt{a^2 - b}.$$

Posto $\Delta = a^2 - b$, l'errore inerente per α_1 è dato da

$$\epsilon_1 = c_{1a}\epsilon_a + c_{1b}\epsilon_b,$$

dove

$$|c_{1a}| = \frac{a}{\sqrt{\Delta}}, \qquad |c_{1b}| = \frac{b}{2(a\sqrt{\Delta} - \Delta)}.$$

Sia $|c_{1a}|$ che $|c_{1b}|$ non sono limitati nell'intorno (destro) di $\Delta = 0$, quindi quando $a^2 \sim b$. Il discorso per α_2 è analogo.

Esercizio 2

(a) Posto

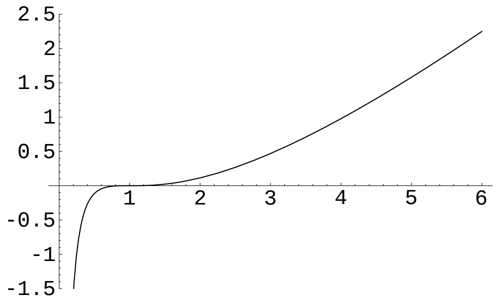
$$f(x) = x - g(x) = x - 2\log x - \frac{1}{x},$$

si ha

$$f'(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2}, \qquad f''(x) = \frac{2(x-1)}{x^3}, \qquad f'''(x) = -\frac{2(2x-3)}{x^4}.$$

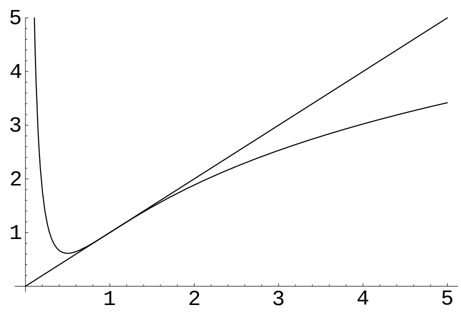
Poiché $f'(x) \geq 0$ per ogni $x > 0$, la funzione $f(x)$ è sempre crescente e l'equazione $f(x) = 0$ può avere al più una soluzione reale. È facile verificare che tale soluzione è $\alpha = 1$ e che ha molteplicità 3.

(c) Il grafico di $f(x)$ è



Sia a sinistra che a destra di α risulta $f(x)f''(x) > 0$, perciò il metodo delle tangenti risulta convergente in modo monotono per ogni x_0 positivo e diverso da 1. L'ordine del metodo è 1.

(b)I grafici di $y = x$ e $y = g(x)$ sono



Già sappiamo che la curva e la retta si incontrano solo per $\alpha = 1$. Poiché la soluzione ha molteplicità 3, i due grafici sono praticamente indistinguibili nell'intorno di α. La $g(x)$ ha un punto di minimo in $m = 1/2$. Per $m \leq x < \alpha$ e per $x > \alpha$ risulta $0 \leq g'(x) < 1$, quindi per x_0 scelto in tali intervalli vi è convergenza monotona. Poiché $g'(\alpha) = 1$, la convergenza è sublineare. Scegliendo x_0 nell'intervallo (aperto) $(0, m)$ il punto x_1 cade a destra di m. Quindi si ha convergenza sublineare ad α per ogni punto $x_0 > 0$ ad eccezione del punto $p = 0.284668$ tale che $g(p) = 1$.

Esercizio 3

(a) Ad esempio, per $n = 6$ si ha

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & 0 & 0 & 0 & \gamma \\ \beta & \alpha & \beta & 0 & 0 & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \beta & \alpha & \beta \\ \gamma & 0 & 0 & 0 & \beta & \alpha \end{bmatrix}$$

Applicando il metodo di Gauss senza scambi di righe, si ottiene ad ogni passo una sottomatrice della stessa forma e di ordine progressivamente decrescente. Ad ogni passo sono richieste 8 operazioni moltiplicative e 4 operazioni additive (infatti vi sono 2 righe da combinare con quella del pivot). Quindi la prima fase del metodo richiede $8n$ operazioni moltiplicative e $4n$ operazioni additive (a meno di termini costanti). Una volta che la matrice è stata trasformata in triangolare superiore, in ogni riga (escluse le ultime 2) vi sono tre elementi non nulli, quindi la risoluzione all'indietro richiede $3n$ operazioni moltiplicative e $2n$ operazioni additive (a meno di termini costanti).

Esercizio 4

I tre punti da usare per la formula di Lagrange sono

$$x_0 = 0,\ y_0 = 0, \qquad x_1 = 1,\ y_1 = 1, \qquad x_2 = 2,\ y_2 = 3.$$

Si ottiene il polinomio

$$p(x) = \frac{x^2 + x}{2}.$$

Se x è l'intero i, si ha $p(i) = (i^2 + i)/2$. Per verificare che y_i è uguale a $p(i)$ per ogni i usiamo l'induzione. Si ha infatti

$$p(i+1) = \frac{(i+1)^2 + (i+1)}{2} = \frac{i^2 + i}{2} + i + 1 = p(i) + i + 1.$$