Soluzione della prova scritta
di Calcolo Numerico del 4/7/2016

Esercizio 1

I numeri $x = 3/4$ e $y = 12$ si rappresentano in modo esatto in $\mathcal{F}$, e vale $x = (\tilde{x}) = (0.110)_2$, $y = (\tilde{y}) = 2^4(0.110)_2$. Si osserva che $(1 \oplus (\tilde{x})) = \text{arr}(7/4) = 7/4 = 2(0.111)_2$, $7/4 \odot 12 = \text{arr}(21) = \text{arr}(2^5(0.10101)_2) = 2^5(0.101)_2 = 20$.

Dalla seconda espressione abbiamo $(3/4 \odot 12) = \text{arr}(9) = \text{arr}(2^4(0.1001)_2) = 2^4(0.101)_2 = 10$. Da cui $10 \oplus 12 = \text{arr}(22) = \text{arr}(2^5(0.1011)_2) = 2^5(0.110)_2 = 24$.

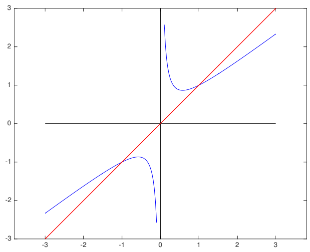
Il valore esatto della funzione doveva essere 21, entrambi gli algoritmi producono risultati diversi, utilizzando il primo otteniamo un risultato con un errore relativo in modulo pari a $|21 - 20|/(21) = 1/21$, utilizzando il secondo l'errore commesso è di $3/21$. La proprietà associativa non è comunque verificata per questi particolari numeri di macchina.

Facendo l'analisi diretta dell'errore per il primo algoritmo otteniamo che $\epsilon^{(1)} = \epsilon_1 + \epsilon_2$ dove ϵ_1 è l'errore locale dovuto alla somma e ϵ_2 è l'errore locale dovuto al prodotto. Otteniamo quindi che $|\epsilon^{(1)}| \leq 2u$ con $u = 1/2 2^{1-t} = 2^{-3}$, da cui si ottiene che con il primo algoritmo l'errore è inferiore a 0.25, infatti nel nostro caso otteniamo che l'errore è stato di $1/21 \approx 0.047$. Dall'analisi diretta del secondo algoritmo troviamo che $\epsilon^{(2)} = \eta_1 + \left(\frac{xy}{xy+y}\right)\eta_2$ con η_1 errore locale dovuto al prodotto tra x e y e η_2 dovuto al prodotto. Per i nostri specifici valori di x e y otteniamo che $\frac{xy}{xy+y} = \frac{x}{x+1} = \frac{3}{7}$ e maggiorando $|\eta_i|$ con u otteniamo $|\epsilon^{(2)}| < 2^{-3}(1+3/7) < 0.18$, mentre per qualsiasi x e y, con $x > -1$ abbiamo $\frac{xy}{xy+y} < 1$ e quindi $|\epsilon^{(2)}| < 2u = 0.25$. Si noti che il valore $3/21 \approx 0.14$ risulta comunque minore della limitazione teorica.

Esercizio 2

(a) Risolvendo $x = g(x)$ otteniamo che i punti fissi di $g(x)$ devono soddisfare l'equazione $(1-a)x^2 - b = 0$. Poichè $a \neq 0$ e $b = 1-a$, otteniamo che ci sono due punti fissi, $x = \pm 1$ comunque vengano presi a e b.

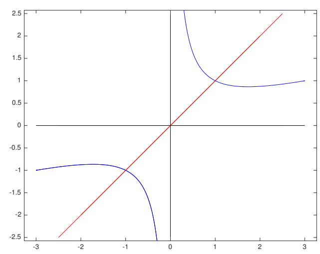
(b) Si nota che $g(x)$ è una funzione dispari perchè $g(x) = -g(-x)$ quindi possiamo studiare la convergenza solo per $x > 0$. Per $a = 3/4$ e $b = 1/4$ abbiamo che $g'(x) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4x^2}$, $g''(x) = \frac{1}{2x^3}$. Si osserva subito che $g'(1) = 0.5$. Poichè $g'(x)$ è una funzione continua su $(0, \infty)$, dal teorema del punto fisso abbiamo assicurata la convergenza locale con ordine 1. Volendo studiare la convergenza in grande osserviamo che: $g'(x) = 0$ per $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$, il valore $x_m = \sqrt{3}/3 < 1$ risulta essere un minimo, e $g(\sqrt{3}/3) = \sqrt{3}/2$. Poichè $\lim_{x\to 0^+} g(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, $g''(x) > 0$, per $x > 0$ e $g(x)$ ha un asintoto obliquo di equazione $y = 3/4x$ abbiamo che il grafico di $g(x)$ risulta



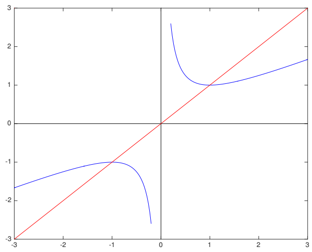
Si vede che per $x_0 > 1$ abbiamo convergenza monotona decrescente in quanto $0 < g'(x) < 1$, per $x_m \leq x_0 \leq 1$, $0 \leq g'(x) < 1$ e quindi otteniamo una successione monotona crescente. Si osserva inoltre che per ogni $0 < x_0 < x_m$ l'iterata $x_1 > x_m$ e quindi si ricade nel caso precedente.

(c) Nel caso generale si ha $g'(x) = a - \frac{b}{x^2}$ da cui abbiamo che $g'(1) = a - b$. Abbiamo 3 casi

1. Se $a - b > 0$, cioè se $1/2 < a < 1$, allora $0 < g'(1) < 1$, e la discussione è analoga a quella del cso precedente.
2. Se $a - b < 0$, cioè se $0 < a < 1/2$, allora $-1 < g'(1) < 0$, $g'(x) = 0$ per $x_m = \sqrt{\frac{b}{a}} > 1$, cioè il punto di minimo si trova a destra della retta $y = x$. Vale che $g(x_m) = 2\sqrt{ab} < 1$. Il grafico risulta



   È assicurata solo la convergenza locale visto che $-1 < g'(1) < 0$, partendo troppo lontano dal punto fisso si potrebbe non avere convergenza.
3. Se $a = b = 1/2$ allora il metodo è almeno del secondo ordine. Analizzando $g''(x) = 2b/x^3$ si trova che l'ordine è esattamente due dato che $g''(1) \neq 0$.
   Il grafico risulta
   Abbiamo convergenza a 1 per ogni $x_0 > 0$ e a -1 per ogni $x_0 < 0$. La convergenza è monotona decrescente per $x_0 > x_m = 1$, mentre



scegliendo $0 < x_0 < 1$ abbiamo che $x_1 > 1$ e poi convergo in modo monotono decrescente.

Esercizio 3

(a) Non esistono valori di α per cui la matrice è a predominanza diagonale per riga o per colonna. Infatti non abbiamo predominanza diagonale per riga a causa delle righe 2, 3, e 4 e non possiamo avere predominanza diagonale per colonna a causa della prima colonna.

(b) La matrice di Jacobi risulta

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\alpha \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Il polinomio caratteristico risulta $p(\lambda) = \lambda^4 - \alpha\lambda^2$. Otteniamo $\rho(J) = \sqrt{|\alpha|}$, quindi il metodo di Jacobi converge se $|\alpha| < 1$.

La matrice di Gauss-Seidel è data da

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

Poichè la matrice è triangolare gli autovalori sono i valori sulla diagonale e quindi $\rho(G) = |\alpha|$ da cui abbiamo che Gauss-Seidel risulta convergente se $|\alpha| < 1$. Per tali valori di α $\rho(G) < \rho(J)$ e quindi Gauss-Seidel converge più velocemente di Jacobi.

Esercizio 4

(a) Si nota che $\cos(\frac{\pi}{2}x_0) = \cos(0) = 1$ mentre $\cos(x_i) = \cos(\frac{\pi}{2}(2i-1)) = 0$ per $i = 1, 2, \ldots, n$. Quindi il polinomio d'interpolazione si riduce a $p(x) = f(x_0)L_0(x) = L_0(x) = \prod_{i=1}^{n} \frac{x-x_i}{x_0-x_i} = (-1)^n \prod_{i=1}^{n} \frac{x-(2i-1)}{2i-1}$.

(b) Utilizzando il teorema del resto abbiamo che $r(x) = \pi(x)\frac{f^{(3)}(\xi)}{(n+1)!}$ Poichè $|f^{(3)}(\xi)| = \frac{\pi^3}{8}\sin(\frac{\pi}{2}\xi)$ e $\pi(x) = x(x-1)(x-3)$, abbiamo

$$|r(x)| \leq \frac{pi^3}{8 * 3!}|x(x-1)(x-3)|.$$

Calcolando il massimo di $|\pi(x)|$ per $x \in [0,3]$ abbiamo che $\max_{x\in[0,3]}|\pi(x)| = \max\{|\pi(4-\sqrt{7})/3|, |\pi((4+\sqrt{7})/3)\} < 2.2$. Otteniamo quindi $|r(x)| < 1.43$.