Soluzione della prima prova parziale di Calcolo Numerico 5 Novembre 2008

Compito A

Esercizio 1

Convertendo in base 2 si ha

$$\frac{1}{11} = 2^{-3}\,(0.\overline{1011101000})_2 \quad \frac{1}{12} = 2^{-3}\,(0.\overline{10})_2 \quad \frac{1}{13} = 2^{-3}\,(0.\overline{100111011000})_2$$

(a) Con troncamento il valore richiesto è $t = 3$ in quanto

$$\widetilde{x}_1 = 2^{-3}\,(0.101)_2 \quad \widetilde{x}_2 = 2^{-3}\,(0.100)_2 \quad \widetilde{z} = 2^{-5}\,(0.1)_2 \neq 0,$$

mentre per $t = 1$ o $t = 2$ risulta $\widetilde{z} = 0$.

Con arrotondamento il valore richiesto è $t = 2$ in quanto

$$\widetilde{x}_1 = 2^{-3}\,(0.11)_2 \quad \widetilde{x}_2 = 2^{-3}\,(0.10)_2 \quad \widetilde{z} = 2^{-4}\,(0.1)_2 \neq 0,$$

mentre per $t = 1$ risulta $\widetilde{z} = 0$.

(b) Con troncamento il valore richiesto è $k = 1$ in quanto

$$\widetilde{x}_1 = 2^{-3}\,(0.10111)_2 \quad \widetilde{x}_2 = 2^{-3}\,(0.10101)_2 \quad \widetilde{z} = 2^{-6}\,(0.1)_2 \neq 0.$$

Con arrotondamento il valore richiesto è $k = 1$ in quanto

$$\widetilde{x}_1 = 2^{-3}\,(0.10111)_2 \quad \widetilde{x}_2 = 2^{-3}\,(0.10101)_2 \quad \widetilde{z} = 2^{-6}\,(0.1)_2 \neq 0.$$

Esercizio 2

(a) Il coefficiente di amplificazione della funzione è

$$c_x = \frac{1}{1 + kx}.$$

Poichè $|c_x|$ non è limitata in un intorno destro di $-1/k$, il calcolo di $f(x)$ risulta mal condizionato in tale intorno. Al di fuori dell'intorno il calcolo risulta ben condizionato.

(b) Il primo algoritmo ha errore

$$|\epsilon_{\text{alg}}^{(1)}| < u \left(1 + \frac{2}{|kx|} + \frac{1}{|1 + kx|}.\right)$$

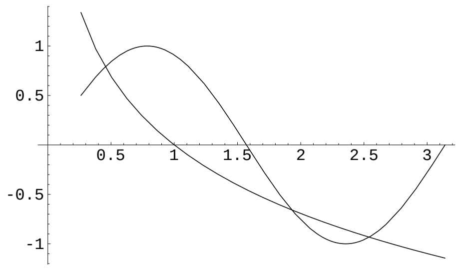
Quindi non è stabile negli intorni destri di $-1/k$ e sinistri di 0. Il secondo algoritmo ha errore

$$|\epsilon_{\text{alg}}^{(2)}| < u \left(2 + \frac{1}{|1 + kx|}.\right)$$

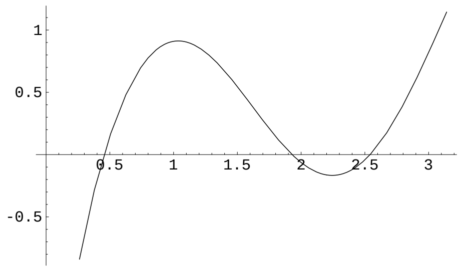
Quindi non è stabile negli intorni destri di $-1/k$. Vi è un diverso comportamento dei due algoritmi nell'intorno sinistro dello zero. Poiché nell'intervallo in esame è $|kx| < 1$, la prima limitazione è sempre maggiore della seconda. Perciò il secondo algoritmo risulta preferibile.

Esercizio 3

(a) Disegnando il grafico delle due funzioni $f_1(x)$ e $f_2(x)$ si vede che nell'intervallo indicato vi sono tre soluzioni $\alpha \in (\pi/12, 1)$, $\beta \in (\pi/2, 2)$, $\gamma \in (2, \pi)$.



(b) Poiché $f_1(\pi/12) - f_2(\pi/12) = 0.5 + \log(\pi/12) \sim -0.84 < 0$ e $f_1(\pi) - f_2(\pi) = \log(\pi) \sim 0.14 > 0$, il metodo di bisezione si può applicare all'intervallo $\mathcal{I}$. L'ampiezza iniziale dell'intervallo è $d = \pi - \pi/12$, per cui sono necessarie 15 iterazioni per ridurla a quanto richiesto. Il punto di mezzo di $\mathcal{I}$ è $m \sim 1.7$ L'intervallo $[\pi/12, m]$ contiene la sola soluzione α, quindi è questa la soluzione che viene approssimata dal metodo di bisezione.



c) Si disegna il grafico della funzione $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$. Studiando $f'(x)$ e $f''(x)$ si vede che vi è un punto di massimo vicino a 1. Quindi l'intervallo di separazione $[\pi/12, m]$ scelto precedentemente per α va ridotto a destra. Prendiamo l'intervallo $\mathcal{K} = [\pi/12, 0.5]$ che contiene ancora α. In $\mathcal{K}$ anche $f''(x)$ non si annulla. Per $x_0 \in \mathcal{K}$ a sinistra di α sono verificate le condizioni sufficienti del teorema di convergenza del metodo delle tangenti. Per un $x_0 \in \mathcal{K}$ a destra di α si verifica che $x_1 \in \mathcal{K}$ e si trova a sinistra di α.