Soluzione della prova scritta di Calcolo Numerico del 5/11/2015

Esercizio 1

(a) Il coefficiente di amplificazione è

$$c_x = \frac{x \sin x}{1 - \cos x}.$$

Poiché

$$\lim_{x \to 0_+} |c_x| = 2, \qquad \lim_{x \to 2\pi_-} |c_x| = \infty,$$

la funzione è malcondizionata nell'intorno sinistro di 2π, ma ben condizionata per x piccolo.

(b) Per il primo algoritmo si ha:

$$\epsilon_{alg_1} = \epsilon^{(2)} - \frac{\cos x}{1 - \cos x}\, \epsilon^{(1)},$$

dove $\epsilon^{(1)}$ e $\epsilon^{(2)}$ sono gli errori locali del calcolo del coseno e della sottrazione, rispettivamente. Quindi

$$|\epsilon_{alg_1}| < u\Big(1 + \frac{|\cos x|}{|1 - \cos x|}\Big) = u\Big(1 + \frac{|\cos x|}{1 - \cos x}\Big).$$

Pertanto il primo algoritmo è instabile sia nell'intorno destro di 0 che nell'intorno sinistro di 2π.

Per il secondo algoritmo si ha:

$$\epsilon_{alg_2} = \eta^{(2)} + 2\,\eta^{(1)},$$

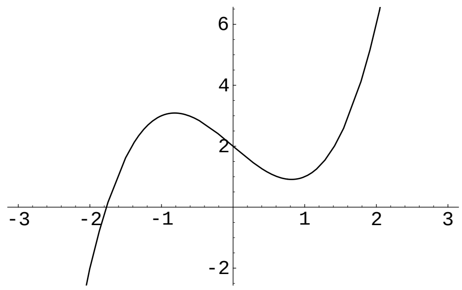
dove $\eta^{(1)}$ e $\eta^{(2)}$ sono gli errori locali del calcolo del seno e del quadrato, rispettivamente (non producono errore la divisione e la moltiplicazione per 2). Quindi

$$|\epsilon_{alg_2}| < 3\,u.$$

Pertanto il secondo algoritmo è stabile per ogni $x \in (0, 2\pi)$.

Esercizio 2

(a) La funzione data ha due punti stazionari s_1 e s_2 che sono gli zeri di $f'(x) = 3x^2 - 2$. Quindi $s_1 = -\sqrt{2/3}$ e $s_2 = \sqrt{2/3}$. Il primo è punto di massimo, il secondo di minimo. Poiché $f(-2) = -2$ e $f(s_1) = 2 + (4\sqrt{6})/9$, la $f(x)$ ha una radice α nell'intervallo $[-2, s_1]$. Inoltre $f(s_2) > 0$, quindi non vi sono altre soluzioni reali. Il grafico è



(b) Il metodo delle tangenti converge ad α per ogni $x_0 < s_1$, in modo monotono dall'inizio se $x_0 < \alpha$, dopo la prima iterata se $\alpha < x_0 < s_1$. Il metodo può convergere ad α anche per altre scelte di x_0, a seguito di successioni variamente alternate.

(c) Se $x_0 = -2$ si ha convergenza monotona come osservato al punto (b). Se $x_0 = -1$ si ha $x_1 = -4$ e da questo punto si ha convergenza monotona come osservato al punto precedente poiché $x_0 < s_1$. Se $x_0 = 0$ si ha $x_1 = 1$, $x_2 = 0$ e la successione prosegue alternando i valori 0 e 1 e quindi non converge.

Esercizio 3

(a) La matrice A è simmetrica, quindi ha tre autovalori reali.

(b) Il primo cerchio di Gerschgorin individua sull'asse reale l'intervallo $[1, 5]$ a cui appartiene l'autovalore minimo di A, il secondo e il terzo individuano l'intervallo $[6, 18]$ a cui appartengono gli altri due autovalori di A.

(c) La matrice B è

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 10 & 1 \\ 0 & 4 & 16 \end{bmatrix}.$$

Il primo cerchio per righe individua sull'asse reale l'intervallo $[2, 4]$ a cui appartiene l'autovalore minimo di B, il secondo e il terzo individuano l'intervallo $[5, 20]$ a cui appartengono gli altri due autovalori di B.

Il primo cerchio per colonne individua sull'asse reale l'intervallo $[-1, 7]$ a cui appartiene l'autovalore minimo di B, il secondo e il terzo individuano l'intervallo $[5, 17]$ a cui appartengono gli altri due autovalori di B. Poichè A e B sono matrici simili, i loro autovalori coincidono. Quindi l'autovalore minimo sta in $[2, 4]$, gli altri due stanno in $[6, 17]$.

Esercizio 4

(a) Il polinomio di interpolazione è

$$p_\alpha(x) = 1 + \frac{\cos\alpha - 1}{\alpha^2}\, x^2.$$

(b) La funzione

$$r_\alpha(x) = f(x) - p_\alpha(x)$$

si annulla in $-\alpha$, 1 e α ed è pari. Poiché

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{\cos\alpha - 1}{\alpha^2} = -\frac{1}{2}$$

si ha $\lim_{\alpha\to 0} |r_\alpha(x)| = |\cos x + \frac{x^2}{2} - 1|$ e il massimo si ottiene per $x = \pi/2$ e vale $\pi^2/8 - 1$.