Soluzione della prova scritta di Calcolo Numerico del 5 Febbraio 2007

Esercizio 1

(a) Risulta

$$c_{\mathrm{g}}(x) = x\,\frac{\mathrm{f}'(x)\,e^{\mathrm{f}(x)}}{e^{\mathrm{f}(x)}} = x\,\mathrm{f}'(x).$$

(b) In questo caso risulta $c_{\mathrm{g}}(x) = x\cos x$. Per $x \in [0,1]$ risulta $|c_{\mathrm{g}}(x)| \le 1$, quindi il calcolo di $\mathrm{g}(x)$ è sempre ben condizionato.

(c) In questo caso risulta $c_{\mathrm{g}}(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x}$. Per $x \in [0,1]$ risulta $|c_{\mathrm{g}}(x)| \le \frac{1}{2}$, quindi il calcolo di $\mathrm{g}(x)$ è sempre ben condizionato.

(d) Risulta

$$\varepsilon_{\mathrm{alg}} \doteq \varepsilon_1 \mathrm{f}(x) + \varepsilon_2,$$

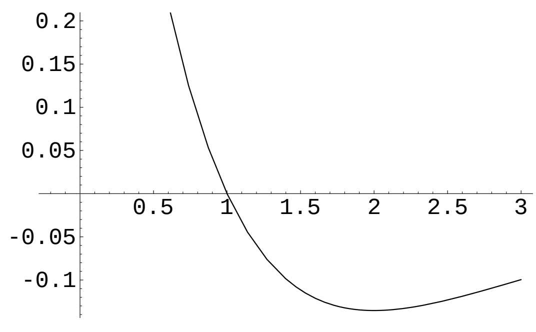
ove ε_1 e ε_2 sono gli errori relativi del calcolo di $\mathrm{f}(x)$ e della funzione esponenziale. Dunque

$$|\varepsilon_{\mathrm{alg}}| \dot{\le} |\varepsilon_1||\mathrm{f}(x)| + |\varepsilon_2|,$$

da cui si trae la disuguaglianza richiesta, tenuto conto del fatto che $|\varepsilon_i| \le u$ per $i = 1, 2$.

Esercizio 2

(a) Si traccia innanzitutto il grafico di $y = f(x)$



In particolare $\alpha = 1$ e $\beta = 2$.

(b) La successione generata scegliendo $x_0 < \alpha$ risulta convergente ad α, come si deduce dall'applicazione del teorema di convergenza in largo del metodo delle tangenti.

(c) La successione generata scegliendo $\alpha < x_0 < \beta$ risulta convergente ad α. Dal grafico si deduce che $x_1 < \alpha$ cosicchè si ricade nel caso trattato nel punto precedente.

(d) Se $x_0 > \beta$ la successione generata risulta divergente, per la precisione $\lim_{k\to\infty} x_k = +\infty$. Dal grafico si deduce che si tratta di una successione monotona crescente. Se convergesse dovrebbe convergere ad uno zero di $\mathrm{f}(x)$ maggiore di β, che non è presente.

(e) Nei casi di convergenza, l'ordine è 2. Infatti $\mathrm{f}(x)$ è derivabile due volte e risulta $\mathrm{f}'(\alpha) \neq 0$ e $\mathrm{f}''(\alpha) \neq 0$.

Esercizio 3

(a) Risulta

$$p_C(\lambda) = \det(C - \lambda I) = -\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c.$$

(b) Siccome $p_A(\lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6$, tenuto conto di quanto ottenuto nel punto precedente, si ha

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -11 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Siccome $p_A(\lambda) = (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)$, gli autovalori di A sono 1, 2, e 3.

(d) La matrice A è diagonalizzabile in quanto ha autovalori distinti.

Esercizio 4

(a) Utilizzando la formula di Lagrange si trova

$$p(x) = \frac{x(x-1)}{a(a-1)}.$$

(b) Utilizzando le derivate o, equivalentemente, la formula per il vertice di una parabola si trovano le coordinate

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4a(1-a)}\right).$$

(c) Se a tende a zero l'ascissa del massimo resta costante ma l'ordinata tende a $+\infty$.

(d) Risulta

$$\max_{[0,1]} |\mathrm{f}(x) - \mathrm{p}(x)| \geq |\mathrm{f}(\frac{1}{2}) - \mathrm{p}(\frac{1}{2})| = \mathrm{p}(\frac{1}{2}) - \mathrm{f}(\frac{1}{2})$$

e inoltre

$$\mathrm{p}(\frac{1}{2}) - \mathrm{f}(\frac{1}{2}) \geq \mathrm{p}(\frac{1}{2}) - \max_{[0,1]} \mathrm{f}(x) = \frac{100}{4 \cdot 0.99} - 1 > 24.$$

(e) Poichè $\max_{[0,1]} |x(x-a)(x-1)| \leq 1$, per il teorema del resto si ha

$$\max_{[0,1]} |\mathrm{f}(x) - \mathrm{p}(x)| = \max_{[0,1]} |x(x-a)(x-1)| \, \frac{|\mathrm{f}^{(3)}(\xi)|}{3!} \leq \frac{1}{6} \max_{[0,1]} |\mathrm{f}^{(3)}(x)|.$$

Utilizzando la limitazione dimostrata nel punto precedente si ottiene

$$\frac{1}{6} \max_{[0,1]} |\mathrm{f}^{(3)}(x)| > 24,$$

da cui segue la limitazione richiesta.