Soluzione della prova scritta di Calcolo Numerico del 5/6/2013

Esercizio 1

L'errore inerente è dato da

$$\epsilon_{in} = c_x \epsilon_x, \quad \text{dove} \quad c_x = \frac{2x}{\tan 2x \cos^2 2x} = \frac{4x}{\sin 4x}\,.$$

c_x è limitato in un intorno destro di 0, poiché $\lim_{x\to 0_+} c_x = 1$, ma non è limitato in un intorno sinistro di $\pi/4$, poiché $\lim_{x\to\pi/4_-} |c_x| = +\infty$. Dunque il calcolo di $f(x)$ è ben condizionato per x vicino a 0, malcondizionato per x vicino a $\pi/4$.

L'errore algoritmico del primo algoritmo è

$$\epsilon_{\text{alg}_1} = \epsilon^{(1)},$$

dove $\epsilon^{(1)}$ è l'errore locale introdotto dalla funzione di libreria che calcola la tangente, avendo tenuto conto del fatto che la moltiplicazione per 2 non causa errore. Pertanto

$$|\epsilon_{\text{alg}_1}| < u,$$

e il primo algoritmo risulta stabile per ogni valore di x nell'intervallo assegnato.

L'errore algoritmico del secondo algoritmo è

$$\epsilon_{\text{alg}_2} = \epsilon^{(4)} + \epsilon^{(1)} - \Big(\epsilon^{(3)} - \frac{\tan^2 x}{1-\tan^2 x}(\epsilon^{(2)} + 2\epsilon^{(1)})\Big),$$

dove $\epsilon^{(1)}$ è l'errore locale introdotto dalla funzione di libreria che calcola la tangente, $\epsilon^{(2)}$ è l'errore locale del quadrato, $\epsilon^{(3)}$ è l'errore locale della differenza e $\epsilon^{(4)}$ è l'errore locale della divisione, avendo tenuto conto del fatto che la moltiplicazione per 2 non causa errore. Maggiorando in modulo gli errori locali con u si ha

$$|\epsilon_{\text{alg}_2}| < 3u\Big(1 + \frac{\tan^2 x}{|1-\tan^2 x)|}\Big).$$

Il secondo algoritmo è instabile in un intorno sinistro di $\pi/4$. È quindi preferibile usare il primo.

Esercizio 2

La funzione $g(x)$ è positiva in $(0,1)$. Si osservi che

$$\lim_{x\to 0_+} g(x) = 0,$$

quindi $g(x)$ è anche continua nell'intervallo $[0,1)$. Si ha

$$\lim_{x\to 1_-} g(x) = \frac{1}{2}, \qquad g'(x) = \frac{1 - x + x\log x}{2x\log^2 x}, \qquad \lim_{x\to 0_+} g'(x) = +\infty,$$

$$g''(x) = \frac{2(x-1) - (1+x)\log x}{2x\log^3 x}.$$

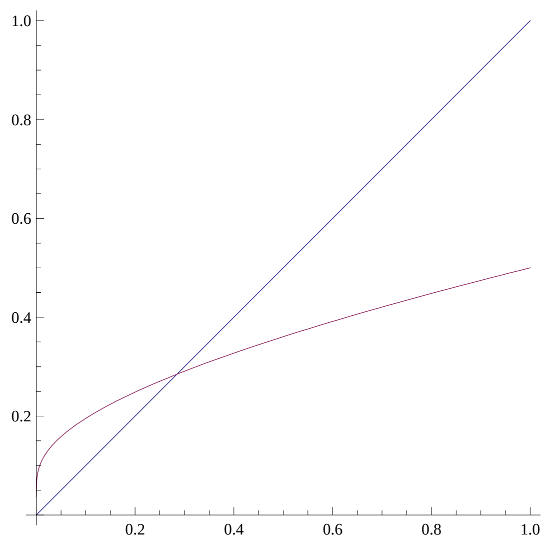
Poiché nell'intervallo $(0,1)$ è

$$x\log x > x - 1 \quad \text{e} \quad 2(x-1) > (1+x)\log x,$$

risulta

$$g'(x) > 0 \quad \text{e} \quad g''(x) < 0.$$

Quindi i grafici di $y = x$ e $y = g(x)$, per $0 \le x < 1$ sono



Nell'intervallo, oltre a 0, esiste un solo altro punto fisso α, al quale il metodo iterativo converge in modo monotono per qualunque x_0 in $(0,1)$. L'ordine di convergenza è uno.

Esercizio 3

(a) La matrice A è triangolare inferiore, e ha predominanza diagonale per righe (e anche per colonne): infatti per gli elementi appartenenti alla riga i-esima, $i \ge 2$ si ha

$$\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} = (i-1)\frac{1}{n} \le 1 - \frac{1}{n} < 2 = a_{ii}.$$

(b) Poiché A ha predominanza diagonale, i metodi di Jacobi e Gauss-Seidel convergono entrambi. Le matrici di iterazione sono rispettivamente $J = -0.5\,B$, e $G = O$, dove B è la matrice triangolare inferiore in senso stretto, avente tutti gli elementi uguali a $1/n$. Ne segue che $\rho(J) = 0$, il che implica che il metodo di Jacobi converge in al più n iterazioni, mentre Gauss-Seidel converge in una sola iterazione, e consiste nel risolvere il sistema triangolare con la sostituzione in avanti.

c) Ad A^T si possono applicare considerazioni simili: A^T è triangolare superiore, ha predominanza diagonale, quindi entrambi i metodi convergono. In questo caso le matrici di iterazione coincidono: $J = G = -0.5\,B^T$, non c'è differenza tra i metodi, che producono una successione convergente in al più n iterazioni.

Esercizio 4

Per gli errori di troncamento (o analitici) assoluti delle formule dei trapezi e di Cavalieri-Simpson, applicate a una funzione $f(x)$ derivabile con continuità un numero sufficiente di volte nell'intervallo di integrazione, si ha rispettivamente:

$$|E_1| = \frac{1}{12}(b-a)^3 \frac{|f''(\xi)|}{N_1^2}, \quad \text{con} \quad a < \xi < b,$$

$$|E_2| = \frac{1}{2880}(b-a)^5 \frac{|f^{iv}(\eta)|}{N_2^4}, \quad \text{con} \quad a < \eta < b,$$

dove N_1 è il numero di sottointervalli per la formula dei trapezi e N_2 è il numero di sottointervalli per la formula di Cavalieri-Simpson.

Nel caso dell'integrale assegnato si ha $a = -1$, $b = 1$ e

$$f''(x) = -\frac{1}{4\sqrt{(x+2)^3}}, \quad f^{iv}(x) = -\frac{15}{16\sqrt{(x+2)^7}},$$

quindi nell'intervallo $[-1, 1]$

$$|f''(x)| \le \frac{1}{4}, \quad |fiv(x)| \le \frac{15}{16},$$

e si ottiene

$$|E_1| \le \frac{1}{6N_1^2}, \quad |E_2| \le \frac{1}{96N_2^4},$$

$$N_1 \ge \frac{10^3}{\sqrt{6}}, \quad N_2 \ge \frac{10\sqrt[4]{100}}{\sqrt[4]{96}},$$

e i minimi interi per cui queste disuguaglianze sono soddisfatte sono $N_1 = 409$, $N_2 = 11$. I corrispondenti costi computazionali, misurati in termini di computazioni di $f(x)$, sono $N_1 + 1 = 410$ per la formula dei trapezi, e $2N_2 + 1 = 23$ per la formula di Cavalieri-Simpson, che risulta quindi più conveniente.