Soluzione della prova scritta
di Calcolo Numerico del 6/9/2012

Esercizio 1

Facendo i grafi si ha

$$\epsilon_{alg_1} = \epsilon^{(3)} + \frac{1}{2}\left(\epsilon^{(2)} - \frac{x^2}{1-x^2}\,\epsilon^{(1)}\right)$$

dove $\epsilon^{(3)}$ è l'errore locale della radice, $\epsilon^{(2)}$ è l'errore locale del calcolo di $1-x^2$, $\epsilon^{(1)}$ è l'errore locale del calcolo di x^2. Maggiorando in modulo gli errori locali con u si ha per $x \in [-1,1]$

$$|\epsilon_{alg_1}| < u\left(\frac{3}{2} + \frac{x^2}{2(1-x^2)}\right).$$

$$\epsilon_{alg_2} = \eta^{(7)} + \eta^{(4)} + \frac{1}{2}\left(\eta^{(3)} - \frac{x^4}{1-x^4}\left(\eta^{(2)} + \eta^{(1)}\right)\right) - \left(\eta^{(6)} + \frac{1}{2}\left(\eta^{(5)} + \frac{x^2}{1+x^2}\,\eta^{(1)}\right)\right)$$

dove $\eta^{(7)}$ è l'errore locale della divisione finale, $\eta^{(4)}$ è l'errore locale del calcolo di $\sqrt{1-x^4}$, $\eta^{(3)}$ è l'errore locale del calcolo di $1-x^4$, $\eta^{(2)}$ è l'errore locale del calcolo di x^4, $\eta^{(1)}$ è l'errore locale del calcolo di x^2, $\eta^{(6)}$ è l'errore locale del calcolo di $\sqrt{1+x^2}$, $\eta^{(5)}$ è l'errore locale del calcolo di $1+x^2$. Maggiorando in modulo gli errori locali con u si ha per $x \in [-1,1]$

$$|\epsilon_{alg_2}| < u\left(4 + \frac{x^4}{1-x^4} + \frac{x^2}{2(1+x^2)}\right).$$

Entrambi gli algoritmi sono instabili nell'intorno destro di -1 e sinistro di 1. Non considerando i termini delle maggiorazioni che sono limitati in modulo negli intorni suddetti, a meno del fattore u le due limitazioni si riducono a

$$\ell_1 = \frac{x^2}{2(1-x^2)}, \quad \ell_2 = \frac{x^4}{1-x^4}$$

e si ha

$$\ell_1 - \ell_2 = \frac{x^2}{2(1+x^2)}.$$

Questo ci dice che negli intorni le due maggiorazioni si comportano nello stesso modo, per cui i due algoritmi sono ugualmente instabili.

Esercizio 2

Sostituendo $y = kx$ nell'equazione della circonferenza si ha

$$f(x) = (1+k^2)x^2 - 1 = 0,$$

le cui due soluzioni sono $\pm\alpha$. Dall'equazione $f(x) = 0$ si possono ricavare molti metodi iterativi della forma $x_{i+1} = g(x_i)$. Consideriamo ad esempio

$$g(x) = \frac{1}{(1+k^2)x}.$$

Partendo da un punto iniziale x_0 si ha

$$x_1 = \frac{1}{(1+k^2)x_0}, \quad x_2 = \frac{1}{(1+k^2)x_1} = x_0, \quad x_3 = \frac{1}{(1+k^2)x_0} = x_1, \quad x_4 = x_0, \ldots$$

La successione non risulta convergente per nessun k se $x_0 \neq \alpha$.

Se invece applichiamo il metodo iterativo delle tangenti, si ha

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{(1+k^2)x^2 - 1}{2(1+k^2)x} = \frac{(1+k^2)x^2 + 1}{2(1+k^2)x}.$$

Poiché $f'(\alpha) \neq 0$ e $f''(\alpha) \neq 0$, il metodo delle tangenti è localmente convergente ad α per ogni k e ha ordine 2. Come punto iniziale si può assumere qualunque $x_0 > 0$. La successione che si ottiene è monotona decrescente a partire da x_1 (da x_0 se $x_0 > \alpha$).

Esercizio 3

È $a_{i,j} = 3(i-1) + j$. Gli elementi della prima riga sono $a_{1,j} = j$, gli elementi della seconda riga sono $a_{2,j} = 3 + j$, gli elementi della terza riga sono $a_{3,j} = 6 + j$. Imponendo la condizione che $\alpha j + \beta(3+j) = 6 + j$ per ogni j si ricava $\alpha = -1$, $\beta = 2$. Poiché la terza riga è combinazione lineare delle altre due, il determinante è nullo. Il polinomio caratteristico di A è

$$p(\lambda) = -\lambda^3 + 15\lambda^2 + 18\lambda,$$

per cui gli autovalori sono

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_{2,3} = \frac{3}{2}\left(5 \pm \sqrt{33}\right).$$

Per quanto riguarda l'autovettore relativo a λ_1 si ha

$$A \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ -1 \end{bmatrix} = \mathbf{0},$$

da cui si ricava subito l'autovettore. Per gli altri autovettori si ha

$$(A - \lambda I) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

cioè

$$\begin{cases} \left(1 - \frac{3}{2}(5 \pm \sqrt{33})\right)x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 4x_1 + \left(5 - \frac{3}{2}(5 \pm \sqrt{33})\right)x_2 + 6x_3 = 0 \\ 7x_1 + 8x_2 + \left(9 - \frac{3}{2}(5 \pm \sqrt{33})\right)x_3 = 0 \end{cases}$$

da cui si ricavano i due autovettori

$$\boldsymbol{x}_{2,3} = \begin{bmatrix} -\frac{13}{11} + \frac{3}{22}(5 \pm \sqrt{33}) \\ -\frac{1}{11} + \frac{3}{44}(5 \pm \sqrt{33}) \\ 1 \end{bmatrix}$$

Esercizio 4

La semicirconferenza ha equazione

$$y_s = \sqrt{1 - x^2}$$

e la parabola ha equazione

$$y_p = 2(\sqrt{3} - 2)x^2 + 1.$$

Quindi la differenza fra le due è

$$d(x) = y_s - y_p = \sqrt{1 - x^2} - 2(\sqrt{3} - 2)x^2 - 1,$$

che è simmetrica rispetto all'origine e si annulla nei punti $-1/2$, 0, $1/2$. La derivata

$$d'(x) = x\Big(- \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} - 4(\sqrt{3} - 2)\Big)$$

si annulla nei due punti

$$x_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{9 - 4\sqrt{3}}}{4},$$

in cui

$$d(x_{1,2}) = \frac{22 - 17\sqrt{3} + 2\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}}{8} \sim 0.0024$$

Ma

$$d(\pm 1) = 3 - 2\sqrt{3} \sim -0.464,$$

per cui

$$\max_{x \in [-1,1]} |d(x)| = 2\sqrt{3} - 3.$$