Soluzione della prova scritta di Calcolo Numerico del 7 Giugno 2007

Esercizio 1

(a) Come noto, operando con arrotondamento risulta $u = 2^{-t}$. Occorre allora risolvere la disequazione $2^{-t} \leq 10^{-6}$, da cui $t \geq 6\frac{\log 10}{\log 2} \simeq 19.9$. Essendo t intero, ne segue $t \geq 20$.

(b) Siccome $1 - 2^{-t} \geq 1/2$ risulta $\Omega = 2^M(1 - 2^{-t}) \geq 2^{M-1}$. Interessano dunque i valori di M che soddisfano alla disequazione $2^{M-1} \geq 10^9$. Si trova $M \geq 1 + 9\frac{\log 10}{\log 2} \simeq 30.9$. Essendo M intero ne segue $M \geq 31$.

(c) Occorre risolvere la disequazione $2^{-m-1} \leq 10^{-9}$. Si trova $m \geq -1 + 9\frac{\log 10}{\log 2} \simeq 28.9$. Essendo m intero ne segue $m \geq 29$.

(d) Risulta $|F| = 1 + 2(M + m + 1)2^{t-1}$. Sostituendo i più piccoli valori compatibili con le precedenti richieste per M, m e t si trova $|F| = 1 + 2^{20}61$ ossia circa 64 milioni di elementi.

(e) Servono 19 bit per la mantissa (tenuto conto della normalizzazione), 6 bit per l'esponente e un bit per il segno. In tutto 26 bit.

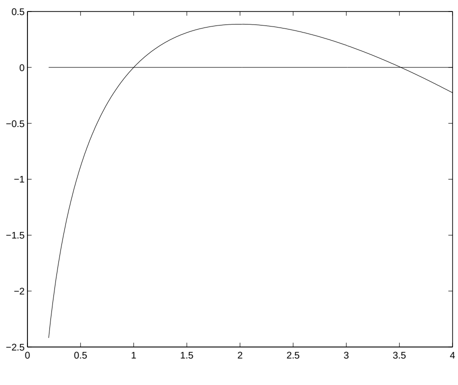
Esercizio 2

(a) Sia $\alpha > 0$, allora

$$2\log\alpha - \alpha + 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 2\log\alpha + 1 \Leftrightarrow \alpha = \exp((\alpha - 1)/2).$$

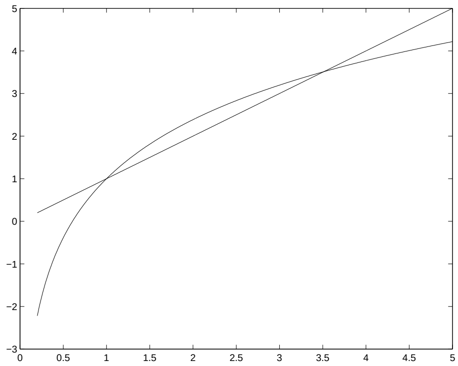
Nessuna delle tre equazioni può avere soluzioni minori o uguali a zero. Ne segue che le tre equazioni sono equivalenti. Si noti che le tre equazioni hanno due soluzioni. Una è 1 e la seconda sarà indicata con γ. Risulta $3 < \gamma < 4$.

(b) Posto $\mathrm{f}(x) = 2\log x - x + 1$ si osserva che $\mathrm{f}(x)$ è definita per $x > 0$. Risulta $\mathrm{f}'(x) = 2/x - 1$ e dunque $\mathrm{f}(x)$ ha un massimo in $x = 2$. Inoltre $\mathrm{f}''(x) = -2/x^2$, per cui la funzione volge la concavità verso il basso. Se ne trae il seguente grafico



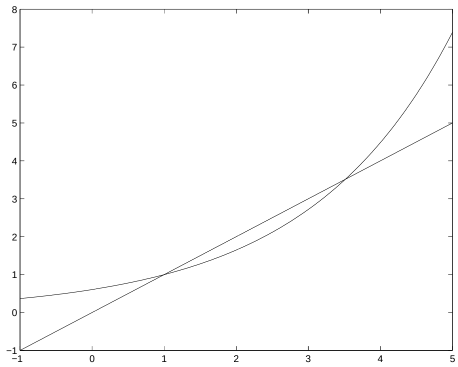
Applicando il teorema sulla convergenza in largo del metodo delle tangenti si deduce che il metodo risulta convergente a 1 per $0 < x_0 < 1$ e risulta convergente a γ per $x_0 > \gamma$ (anzi per $x_0 > 2$). Applicando il teorema sull'ordine si deduce che in entrambi i casi l'ordine di convergenza è 2.

(c) Si disegna innanzi tutto il grafico della funzione $\mathrm{g}(x) = 2 \log x + 1$ e della bisettrice ottenendo



Dal disegno si ottiene subito che il metodo è divergente per $x_0 < 1$ mentre è convergente a γ per $x_0 > 1$. La convergenza è di tipo lineare avendosi $\mathrm{g}'(\gamma) \neq 0$.

(d*) Si disegna innanzi tutto il grafico della funzione $\mathrm{g}(x) = \exp((x-1)/2)$ e della bisettrice ottenendo



Ne segue che il metodo è convergente a 1 per $x_0 < \gamma$ e divergente per $x_0 > \gamma$. È meglio utilizzare il metodo delle tangenti in quanto ha ordine di convergenza maggiore e costo per iterazione confrontabile con quello degli altri due metodi.

Esercizio 3

(a) Dalla $A^2 - 3A + 2I = O$ segue $(A^2 - 3A + 2I)v = 0$ e quindi $(\lambda^2 - 3\lambda + 2)v = 0$. Avendosi $v \neq 0$ segue che $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$.

(b) L'equazione di secondo grado $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ ha le due soluzioni 1 e 2 che risultano quindi essere i possibili autovalori di A. Dunque A non può avere 0 come autovalore. Ne segue che A deve essere invertibile.

(c) Ricavando I dall'equazione $A^2 - 3A + 2I = O$ si trova $I = \frac{3}{2}A - \frac{1}{2}A^2$. Moltiplicando ambo i membri per A^{-1} si trova $A^{-1} = \frac{3}{2}I - \frac{1}{2}A$.

(d) Ovviamente otteniamo che $x = \frac{3}{2}b - \frac{1}{2}Ab$ ed il calcolo di questa espressione è dominato dal calcolo del prodotto Ab che costa n^2 operazioni moltiplicative.

Esercizio 4

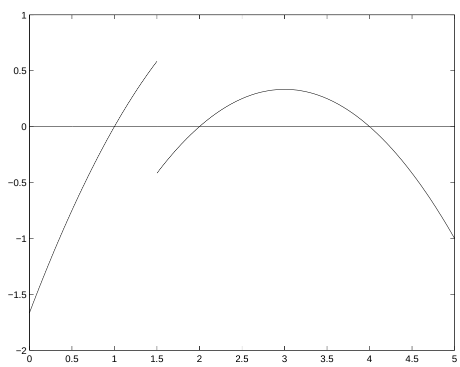
(a) Si trova $p(x) = 1/3(x-2)(x-4)$.

(b) Si trova $q(x) = -1/6(x-2)(x-3)(x-4)$.

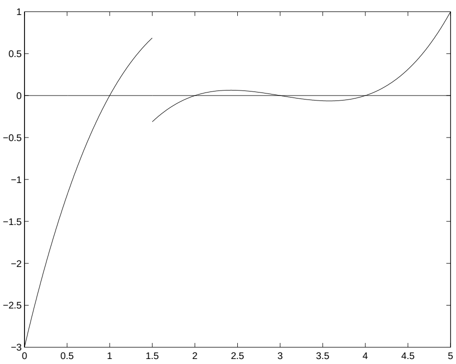
(c) Posto $r_p(x) = f(x) - p(x)$ risulta ovviamente

$$r_p(x) = \begin{cases} 1 - p(x) \text{ per } 0 \leq x \leq 1.5, \\ -p(x) \text{ per } 1.5 < x \leq 5. \end{cases}$$

Anche se $p(x)$ interpola $f(x)$ non si può utilizzare il teorema del resto a causa del fatto che $f(x)$ non è continua. Si traccia allora un grafico di $r_p(x)$ ottenendo



Si nota che $\max_{[0,5]} |r_p(x)| = |r_p(0)| = 5/3$. Per $r_q(x)$ si procede in modo analogo ottenendo il grafico



Si nota che $\max\limits_{[0,5]} |r_q(x)| = |r_q(0)| = 4$. Assumendo di utilizzare il massimo del valore assoluto del resto come misura della bontà dell'approssimazione, si conclude che nell'intervallo $[0, 5]$ il polinomio $p(x)$ approssima $f(x)$ meglio che il polinomio $q(x)$