Soluzione della prova scritta
di Calcolo Numerico del 7/7/2010

Esercizio 1

Per l'errore inerente si ha

$$\epsilon_{in} = c_x\, \epsilon_x, \quad \text{dove} \quad c_x = \frac{\sqrt{x} - 3x + 2x^2}{2\sqrt{x} + x^2 - 3x} = \frac{1 - 3\sqrt{x} + 2x\sqrt{x}}{2 - 3\sqrt{x} + x\sqrt{x}} = \frac{1 - 2\sqrt{x} - 2x}{2 - \sqrt{x} - x}.$$

Si ha

$$\lim_{x\to 0} |c_x| = \frac{1}{2}, \qquad \lim_{x\to 1} |c_x| = \infty, \qquad \lim_{x\to\infty} |c_x| = 2.$$

Quindi il problema del calcolo di $f(x)$ è mal condizionato solo per x nell'intorno di 1. Per l'errore algorimico si ha

$$\epsilon_{alg} = \epsilon^{(4)} + \frac{\sqrt{x}}{f(x)}\epsilon^{(1)} + \frac{x(3-x)}{2f(x)}\big(\epsilon^{(2)} + \epsilon^{(3)}\big),$$

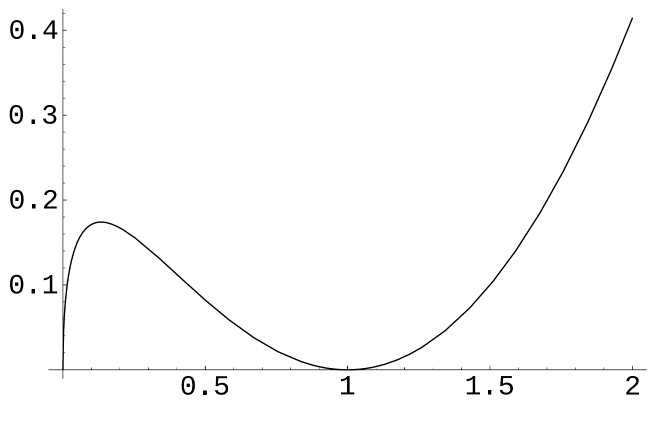
dove $\epsilon^{(2)}$ e $\epsilon^{(4)}$ sono gli errori locali della prima e della seconda sottrazione, $\epsilon^{(1)}$ è l'errore locale della radice e $\epsilon^{(3)}$ è l'errore locale del prodotto. Quindi

$$|\epsilon_{alg}| < u\Big(1 + \frac{\sqrt{x} + |3-x|x}{|f(x)|}\Big).$$

L'algoritmo risulta instabile solo nell'intorno di 1.

Esercizio 2

a) Il grafico di $f(x)$ è



Vi sono due soluzioni: $\alpha = 0$ in cui la funzione non è derivabile (la molteplicità è 1/2) e $\beta = 1$ (di molteplicità 2).

b) È

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{3}{2} + x, \qquad f''(x) = 1 - \frac{1}{4x\sqrt{x}}.$$

Si ha $f'(x) = 0$ per $x_M = 1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2} \sim 0.134$ (punto di massimo) e per $x_m = \beta = 1$ (punto di minimo), $f''(x) = 0$ per $x_f = \dfrac{1}{\sqrt[3]{16}} \sim 0.4$ (punto di flesso).

c) Per $x \leq x_M$ il metodo delle tangenti si arresta alla prima iterazione. Per $x \geq x_f$ il metodo converge a β in modo monotono, con ordine 1. Anche per $x \in (x_M, x_f)$ il metodo converge a β, in modo monotono se $x_1 \geq x_f$.

Esercizio 3

a) $\sqrt{A}$ è reale se e solo se gli autovalori di A sono reali e positivi.

b) Nel caso della matrice data, gli autovalori sono $\lambda_1 = 9$ e $\lambda_2 = 4$ e gli autovettori sono

$$\boldsymbol{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Quindi

$$A \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix},$$

da cui si ricava che

$$S = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ne segue che

$$\sqrt{A} = SBS^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/7 & 1/7 \\ -1/7 & 2/7 \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 20 & 2 \\ 3 & 15 \end{bmatrix}.$$

c) Altre matrici si ottengono scegliendo altre combinazioni dei segni $+$ e $-$ nella matrice B.

Esercizio 4

a) Poiché $p'(x) = 2a_2 x + a_1$ e $f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, si impongono le condizioni

$$p(0) = a_0 = 0, \quad p(1) = a_2 + a_1 = 1, \quad p'(1) = 2a_2 + a_1 = \frac{1}{2},$$

da cui si ottiene

$$p(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}.$$

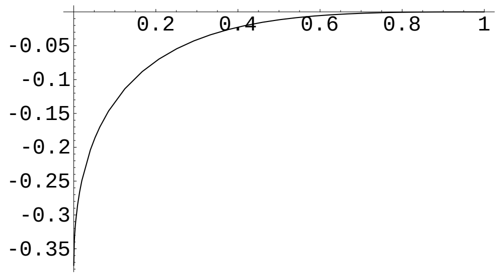
b) Il polinomio di Taylor è

$$q(x) = f(1) + (x-1)f'(1) + \frac{(x-1)^2}{2} f''(1) = 1 + \frac{x-1}{2} + \frac{(x-1)^2}{8} = -\frac{x^2}{8} + \frac{3x}{4} + \frac{3}{8}.$$

c) Il grafico di $r(x) = f(x) - p(x)$ è quello trovato all'esercizio 2, ed è

$$\max_{x \in [0,1]} |r(x)| = r(x_M) \sim 0.174.$$

Il grafico di $s(x) = f(x) - q(x)$ è



e

$$\max_{x \in [0,1]} |s(x)| = -s(0) = \frac{3}{8} = 0.375.$$

Quindi $p(x)$ approssima $f(x)$ meglio di $q(x)$ nell'intervallo indicato. In un altro intervallo però, può accadere l'opposto. Per esempio $q(x)$ approssima meglio di $p(x)$ per $x \in [0.5, 1]$.