Soluzione della prima prova parziale di Calcolo Numerico
7 Novembre 2012

Compito A

Esercizio 1

(a) È

$$a = 2_{10} = (0.1000000)_2 2^2 \in \mathcal{F}, \quad b = 100_{10} = (0.1100100)_2 2^7 \in \mathcal{F}.$$

In $\mathcal{F}$ il numero di successivo ad a è $\omega = (0.1000001)_2 2^2$ e il numero precedente a b è $\Omega = (0.1100011)_2 2^7$. Quindi ω e Ω sono il minimo e il massimo di $\mathcal{F}(a, b)$ e

$$\mathcal{F}(a, b) = \{x \in \mathcal{F} \ : \ (0.1000001)_2 2^2 \le x \le (0.1100011)_2 2^7\}.$$

(b) Per contare gli elementi di $\mathcal{F}(a, b)$ conviene considerare la seguente partizione $\mathcal{F}(a, b) = \mathcal{F}_1 \bigcup \mathcal{F}_2 \bigcup \mathcal{F}_3$, dove

$$\mathcal{F}_1 = \{x \in \mathcal{F} \ : \ (0.1000001)_2 2^2 \le x \le (0.1111111)_2 2^6\},$$

$$\mathcal{F}_2 = \{x \in \mathcal{F} \ : \ (0.1000000)_2 2^7 \le x \le (0.1011111)_2 2^7\},$$

$$\mathcal{F}_3 = \{x \in \mathcal{F} \ : \ (0.1100000)_2 2^7 \le x \le (0.1100011)_2 2^7\},$$

I numeri contenuti in $\mathcal{F}_1$ sono $5(2^7 - 2^6) - 1 = 5 \cdot 2^6 - 1 = 319$ (il -1 è dovuto al fatto che $a \notin \mathcal{F}_1$), quelli contenuti in $\mathcal{F}_2$ sono $2^5 = 32$, quelli contenuti in $\mathcal{F}_3$ sono 4. In totale i numeri contenuti in $\mathcal{F}(a, b)$ sono 355.

(c) Gli interi compresi fra 3 e 99 (estremi inclusi) sono 97 e appartengono tutti a $\mathcal{F}(a, b)$ perché sono rappresentabili con 7 cifre significative.

(d) Gli interi divisibili per 4 compresi fra 3 e 99 sono 24 e appartengono tutti a $\mathcal{F}(a, b)$. La loro rappresentazione ha le ultime k cifre della mantissa nulle se l'esponente è $9 - k$, per $k = 2, \ldots, 5$.

Esercizio 2

(a) Il coefficiente di amplificazione di $f(x)$ è

$$c_x = \frac{3x^3(2x^3 - 1)}{1 - x^3 + x^6} = \frac{3x^3(2x^3 - 1)(x^3 + 1)}{x^9 + 1}.$$

Per $x > 1$ è

$$|c_x| = c_x < \frac{6x^6(x^3 + 1)}{x^9} = \frac{6(x^3 + 1)}{x^3} \le 12.$$

Quindi il problema del calcolo di $f(x)$ per $x > 1$ è ben condizionato.

(b) Per il primo algoritmo si ha

$$\epsilon_{\text{alg}}^{(1)} = \epsilon^{(5)} + \frac{1-x^3}{f(x)}\Big(\epsilon^{(4)} - \frac{x^3}{1-x^3}\,(\epsilon^{(2)}+\epsilon^{(1)})\Big) + \frac{x^6}{f(x)}\Big(\epsilon^{(3)}+2\epsilon^{(2)}+2\epsilon^{(1)}\Big)$$

dove $\epsilon^{(1)}$, $\epsilon^{(2)}$ e $\epsilon^{(3)}$ sono gli errori locali del calcolo di x^2, x^3 e x^6, $\epsilon^{(4)}$ e $\epsilon^{(5)}$ sono gli errori locali della sottrazione e della addizione finale. Quindi

$$\epsilon_{\text{alg}}^{(1)} = \epsilon^{(5)} - \frac{x^3-1}{f(x)}\epsilon^{(4)} + \frac{x^6}{f(x)}\,\epsilon^{(3)} + \frac{2x^6-x^3}{f(x)}\Big(\epsilon^{(2)}+\epsilon^{(1)}\Big)$$

e maggiorando in modulo gli errori locali con u per $x > 1$ si ha

$$|\epsilon_{\text{alg}}^{(1)}| < u\Big(1+\frac{5x^6-x^3-1}{f(x)}\Big) < u\Big(1+\frac{5x^6(x^3+1)}{x^9+1}\Big) < u\Big(1+\frac{5x^6(x^3+1)}{x^9}\Big) < 11u.$$

Quindi il primo algoritmo è stabile.

Per il secondo algoritmo si ha

$$\epsilon_{\text{alg}}^{(2)} = \epsilon^{(7)} - \Big(\epsilon^{(5)}+\frac{x^3}{x^3+1}(\epsilon^{(2)}+\epsilon^{(1)})\Big)+\Big(\epsilon^{(6)}+\frac{x^9}{x^9+1}\,(\epsilon^{(4)}+\epsilon^{(3)}+3\epsilon^{(2)}+2\epsilon^{(1)})\Big)$$

dove $\epsilon^{(1)}$, $\epsilon^{(2)}$, $\epsilon^{(3)}$ e $\epsilon^{(4)}$ sono gli errori locali del calcolo di x^2, x^3, x^6 e x^9, $\epsilon^{(5)}$ e $\epsilon^{(6)}$ sono gli errori locali delle due addizioni e $\epsilon^{(7)}$ è l'errore locale della divisione finale. Quindi

$$\epsilon_{\text{alg}}^{(2)} = \epsilon^{(7)}+\epsilon^{(6)}-\epsilon^{(5)}+\frac{x^9}{x^9+1}\,(\epsilon^{(4)}+\epsilon^{(3)})+\frac{2x^9+x^6-x^3}{x^9+1}\,\epsilon^{(2)}+\frac{x^9+x^6-x^3}{x^9+1}\,\epsilon^{(1)}$$

Maggiorando in modulo gli errori locali con u per $x > 1$ si ha

$$|\epsilon_{\text{alg}}^{(2)}| < u\Big(3+\frac{5x^9+2x^6-2x^3}{x^9+1}\Big) < u\Big(3+\frac{x^6(5x^3+2)}{x^9}\Big) < 10u.$$

Quindi anche il secondo algoritmo è stabile. Lo scarso margine delle due maggiorazioni fa preferire il primo algoritmo sulla base del minor costo computazionale.

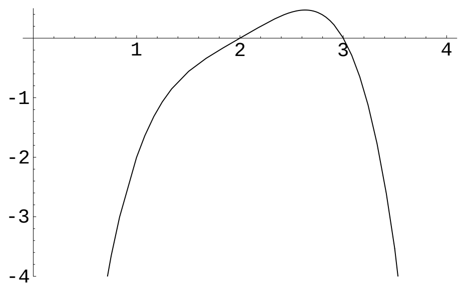
Esercizio 3

(a) L'equazione

$$f(x) = x-g(x) = x-2-(x-2)^4 = (x-2)(1-(x-2)^3) = -(x-2)(x-3)(x^2-3x+3) = 0$$

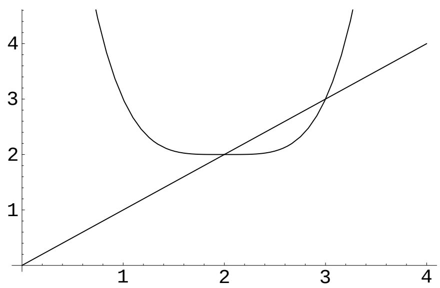
ha le due soluzioni $\alpha = 2$ e $\beta = 3$.

(b) Per studiare la convergenza del metodo delle tangenti si disegna il grafico della $f(x)$.



È $f'(x) = 1 - 4(x-2)^3$, quindi la derivata si annulla nel solo punto $x_m = 2 + 2^{-2/3} \sim 2.63$. Le condizioni del teorema di convergenza in grande sono verificate per $x < \alpha$ e $x > \beta$. Quindi per $x_0 < \alpha$ si ha convergenza monotona crescente ad α e per $x_0 > \beta$ si ha convergenza monotona decrescente a β. Però si ha convergenza ad α anche per $x_0 \in (\alpha, x_m)$ e a β per $x_0 \in (x_m, \beta)$, monotona dopo la prima iterata. Poiché $f'(\alpha) \neq 0$ e $f''(\alpha) = f'''(\alpha) = 0$ e $f^{(4)}(\alpha) \neq 0$, il metodo delle tangenti per l'approssimazione di α ha ordine 4. Poiché $f'(\beta) \neq 0$ e $f''(\beta) \neq 0$, il metodo delle tangenti per l'approssimazione di β ha ordine 2.

(c) Dal grafico delle due funzioni $y = x$ e $y = g(x)$



risulta evidente che vi è convergenza locale ad α e non vi è convergenza locale a β. Per la soluzione α l'intervallo di convergenza è l'aperto $(1, 3)$. Se si sceglie $x_0 \in (2, 3)$ si ha convergenza monotona decrescente, se si sceglie $x_0 \in (1, 2)$, si ha $x_1 \in (2, 3)$, poi si ha convergenza monotona decrescente. Poiché $g'(\alpha) = g''(\alpha) = g'''(\alpha) = 0$ e $g^{(4)}(\alpha) \neq 0$, l'ordine di convergenza è 4.

Compito B

Lo svolgimento è sostanzialmente uguale a quello del compito A. L'unica differenza di rilievo è che il secondo algoritmo dell'esercizio 2 risulta instabile nell'intorno destro di 1.