Soluzione della prova scritta di Calcolo Numerico del 7 Febbraio 2008

Esercizio 1

(a) Per l'errore inerente si ha

$$\epsilon_{in} = c_f \epsilon_x, \quad \text{dove} \quad c_f = \frac{x f'(x)}{f(x)} = \frac{x(1-\cos x)}{x - \sin x}.$$

Si ha $c_f \geq 0$. Inoltre $\lim_{x \to 0^+} c_f = 3$. Quindi c_f risulta limitata in ogni intorno destro chiuso dello 0. Pertanto il problema del calcolo di $f(x)$ è bencondizionato. In particolare nell'intervallo considerato è

$$c_f < \frac{x^3/2}{x^3/3! - x^5/5!} = \frac{60}{20 - x^2} = 3 + \frac{3x^2}{20 - x^2} < 3 + \frac{3 \cdot 0.1^2}{20 - 0.1^2} < 3.1$$

e $|\epsilon_{in}| < 3.1\, |\epsilon_x|$.

(b) Usando la formula di Taylor si ha

$$f(x) = x - \sin x = x - \Big(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots\Big) = g(x) + \frac{x^7}{7!} - \dots \leq g(x) + \frac{x^7}{7!}$$

Inoltre $f(x) \geq g(x) \geq 0$, quindi

$$0 \leq f(x) - g(x) \leq \frac{x^7}{7!},$$

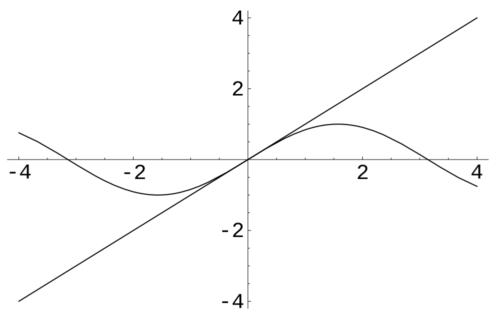
e

$$|\epsilon_{an}| = \frac{|f(x) - g(x)|}{|f(x)|} \leq \frac{x^7}{7! g(x)} = \frac{3!\, x^7}{7!\, x^3 (1 - x^2/20)} \leq \frac{3!\, x^4}{7! \min_{x \in (0,1/10)} (1 - x^2/20)}.$$

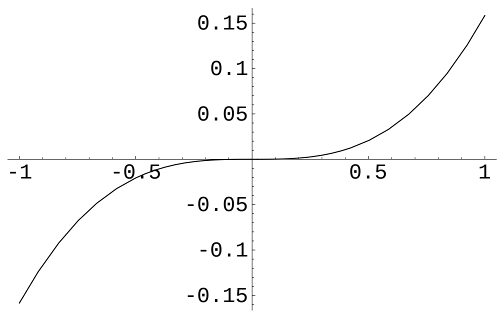
Poiché $\min_{x \in (0,1/10)} (1 - x^2/20) = 1999/2000$, risulta $\quad |\epsilon_{an}| < 0.0012\, x^4$.

Esercizio 2

L'equazione ha la sola soluzione $\alpha = 0$ di molteplicità 3.
(a) Il teorema del punto fisso nella versione riportata nelle dispense come teor. 2.14 **NON** può essere applicato nel nostro caso perché non esiste alcun intorno di α in cui $|g'(x)| < 1$. Vale tuttavia un risultato analogo di convergenza nell'ipotesi più debole che $|g'(x)| < 1$ per x in un intorno circolare di α e $|g'(\alpha)| = 1$. Però la convergenza si verifica più semplicemente per via grafica. Disegniamo il grafico delle due funzioni $y = x$ e $y = \sin x$.



Per ogni x_0 risulta $|x_1| \leq 1$. Dal grafico risulta poi evidente che a partire da x_1 la successione converge a 0 in modo monotono. Poiché $g'(\alpha) = 1$, il metodo ha convergenza sublineare.
(b) Dal grafico della funzione $f(x)$ risulta che il metodo delle tangenti converge per ogni $x_0 \in (-\pi, \pi)$.



Infatti in tale intervallo non vi sono altri punti di annullamento delle derivate prima e seconda, oltre allo 0. L'ordine di convergenza è 1.
(c) Posto $g(x) = x - 3f(x)/f'(x)$, si ha

$$\lim_{x \to \alpha} g'(x) = -2 + \lim_{x \to \alpha} \frac{3(x - \sin x) \sin x}{(1 - \cos x)^2} = 0.$$

Ne segue che esiste un intorno di α in cui $|g'(x)| < 1$ e quindi il metodo converge con convergenza superlineare. Volendo analizzare più in dettaglio l'ordine di convergenza si usa la formula di Taylor, ottenendo

$$x_{i+1} = g(x_i), \quad \text{dove} \quad g(x) \sim -\frac{x^3}{30} - \frac{x^5}{840} + \ldots$$

Quindi in un intorno dello 0 (sufficientemente piccolo) il metodo si comporta come $x_{i+1} \sim x_i^3/30$, cioè converge con ordine di convergenza 3.

Esercizio 3

(a) In $\mathbf{R}^2$ la disuguaglianza da verificare è

$$|x_1 y_1 + x_2 y_2| \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2} + \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$$

Elevando al quadrato entrambi i membri che sono non negativi si ha

$$(x_1y_1 + x_2y_2)^2 \leq (x_1^2 + x_2^2)\,(y_1^2 + y_2^2),$$

da cui

$$2x_1y_1x_2y_2 \leq x_1^2y_2^2 + y_1^2x_2^2,$$

cioè

$$x_1^2y_2^2 + y_1^2x_2^2 - 2x_1y_1x_2y_2 \geq 0.$$

Questa relazione vale in quanto il primo membro è un quadrato perfetto.
(b) Si ha $\|\boldsymbol{x}\|_2\ \|\boldsymbol{y}\|_2 \leq \|\boldsymbol{x}\|_1\ \|\boldsymbol{y}\|_1$.
(c) Scegliendo $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ si ha $|x_1y_1 + x_2y_2| = 2$ e $\|\boldsymbol{x}\|_\infty\ \|\boldsymbol{y}\|_\infty = 1$.

Esercizio 4

(a) Posto $y_0 = f(0)$, $y_1 = f(1)$, $y_2 = f(x_2)$ e

$$V = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{bmatrix},$$

i coefficienti del polinomio di interpolazione $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ si ottengono risolvendo il sistema

$$V \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

Se $x_2 \neq 0$ e $x_2 \neq 1$ si ha

$$a_0 = y_0, \quad a_1 = \frac{(1 - x_2^2)\,y_0 + x_2^2\,y_1 - y_2}{x_2^2 - x_2}, \quad a_2 = \frac{(x_2 - 1)\,y_0 - x_2\,y_1 + y_2}{x_2^2 - x_2}.$$

(b) La matrice di Jacobi ricavata dalla V è

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1/x_2^2 & -1/x_2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Il suo polinomio caratteristico è $p(\lambda) = -\lambda(\lambda^2 - 1/x_2)$ e per i tre autovalori si ha $\lambda_1 = 0$, $|\lambda_{2,3}| = 1/\sqrt{|x_2|}$. Quindi la condizione necessaria e sufficiente di convergenza del metodo di Jacobi è $|x_2| > 1$.