Soluzione della prova scritta di Calcolo Numerico del 7/9/2011

Esercizio 1

Per l'errore inerente si ha

$$\epsilon_{in} = c_x\, \epsilon_x, \quad \text{dove} \quad c_x = \frac{x}{\sin x\, \cos x} = \frac{2x}{\sin(2x)}.$$

Nell'intervallo $|x| < \pi/4$ è

$$|c_x| < \frac{\pi/2}{\sin(\pi/2)} = \pi/2,$$

quindi il problema del calcolo di $f(x)$ è ben condizionato.

Dalla formula di Taylor si ha

$$f(x) = x + \frac{x^3}{3!}\, f'''(\xi), \quad \text{dove} \quad |\xi| < \pi/4,$$

quindi $p(x) = x$ e l'errore analitico assoluto è $\epsilon_{\rm an} = \tan x - x$. Quindi

$$|\epsilon_{\rm an}| < \frac{\pi^3}{4^3\, 3!} \max_{|x|\le \pi/4} |f'''(x)|, \quad \text{dove} \quad f'''(x) = \frac{2\,(1 + 2\, \sin^2 x)}{\cos^4 x}.$$

Poiché

$$\max_{|x|\le \pi/4} |f'''(x)| = f'''(\pi/4) = 16,$$

per l'errore analitico assoluto si ha $|\epsilon_{\rm an}| < \pi^3/48$. Per l'errore analitico relativo si ha

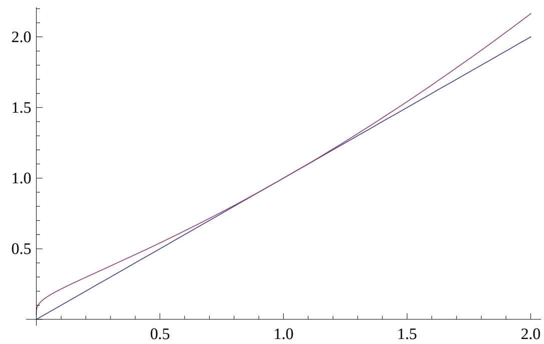
$$\left|\frac{\epsilon_{\rm an}}{\tan x}\right| = \left|1 - \frac{x}{\tan x}\right| \le \max_{|y|\le\pi/4} \left|1 - \frac{y}{\tan y}\right| = 1 - \min_{|y|\le\pi/4} \left|\frac{y}{\tan y}\right| = 1 - \frac{\pi/4}{\tan(\pi/4)} = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

Esercizio 2

La funzione $g(x)$ non è definita per $x = 1$, ma i due limiti sinistro e destro di $g(x)$ per $x \to 1$ esistono finiti e coincidono. Infatti valgono entrambi 1. Si può quindi prolungare per continuità la $g(x)$ nel punto $x = 1$. Si considera perciò la funzione

$$\overline{g}(x) = \begin{cases} g(x) & \text{per } x > 0 \text{ e } x \ne 1 \\ 1 & \text{per } x = 1 \end{cases}$$

La funzione $\overline{g}(x)$ risulta così continua. Poiché il metodo iterativo assegnato, se si assume $x_0 \ne 1$, non richiede mai di utilizzare $g(1)$, il suo comportamento può essere valutato studiando il comportamento del metodo $x_{i+1} = \overline{g}(x_i)$. Questo metodo, se convergente, risolverebbe l'equazione $x = \overline{g}(x)$ per $x > 0$, cioè l'equazione $2\,x\, \log x = x^2 - 1$, che ha la sola soluzione $x = 1$. I grafici delle due funzioni $y = x$ e $y = \overline{g}(x)$ risultano



Nel punto $x = 1$ la bisettrice è tangente alla curva. Dal grafico appare evidente che se $x_0 < 1$ la successione generata è monotona crescente e converge a 1, mentre se $x_0 > 1$ la successione, ancora monotona, diverge. La convergenza, nel primo caso, risulta sublineare. Infatti si ha

$$g'(x) = \frac{1 - x^2 + 2\,x^2\,\log x}{2\,x\,\log^2 x} \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 1^-} g'(x) = 1.$$

Esercizio 3

a) La matrice ha predominanza diagonale in senso stretto solo per $n \leq 2$.
b) La matrice A è triangolare superiore, quindi $A = D - B - C$ con $B = O$. La matrice di iterazione di Jacobi risulta $J = D^{-1}C = \frac{1}{2}C$, quindi triangolare superiore con diagonale nulla. Il suo raggio spettrale è 0. Quindi il metodo di Jacobi è convergente. Inoltre la matrice di iterazione di Gauss-Seidel risulta $G = (D - B)^{-1}C = D^{-1}C = J$, per cui, in questo caso, i due metodi coincidono.
c) La matrice A^T è triangolare inferiore. Per quanto riguarda il metodo di Jacobi, il discorso è lo stesso che al punto b), quindi il metodo è convergente. Invece per il metodo di Gauss-Seidel il discorso è diverso perché in questo caso la parte triangolare superiore di A^T è nulla e quindi la matrice di iterazione G è nulla. Il suo raggio spettrale è 0 e il metodo è ugualmente convergente, ma non coincide con quello di Jacobi. In particolare con il metodo di Gauss-Seidel si ottiene la soluzione con una sola iterata, mentre con il metodo di Jacobi no.

Esercizio 4

È

$$p_1(x) = x, \quad \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0, \quad \int_{-1}^{1} p_1(x)\,dx = 0.$$

Con questa approssimazione l'errore risulta nullo.

$$p_2(x) = \frac{5}{8}\,x^2 + x - \frac{5}{8}, \quad \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0, \quad \int_{-1}^{1} p_2(x)\,dx = -\frac{5}{6}.$$

Con questa approssimazione l'errore è $5/6$.