Soluzione della prova scritta
di Calcolo Numerico del 7/9/2015

Esercizio 1

(a) L'errore inerente risulta

$$\epsilon_{in} = c_x \epsilon_x, \quad \text{dove} \quad c_x = \frac{x\, f'(x)}{f(x)} = -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}.$$

Poichè

$$\lim_{x \to 1} |c_x| = +\infty$$

il problema risulta malcondizionato in un intorno di $x = 1$. Il problema è ben condizionato per x grande.

(b) L'errore algoritmico per il primo algoritmo è

$$\epsilon_{\text{alg}}^{(1)} = \epsilon^{(2)} - \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\,\epsilon^{(1)},$$

dove $\epsilon^{(1)}$ e $\epsilon^{(2)}$ sono gli errori locali di $\sqrt{x}$ e di $1-\sqrt{x}$ rispettivamente. Quindi $\epsilon_{\text{alg}}^{(1)}|$ non è superiormente limitato in un intorno di 1. Per il secondo algoritmo abbiamo

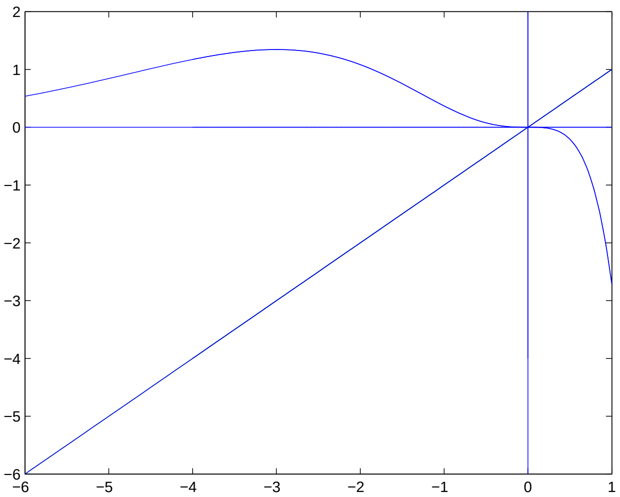
$$\epsilon_{\text{alg}}^{(2)} = \epsilon^{(4)} + \epsilon^{(1)} - (\epsilon^{(3)} + \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,\epsilon^{(2)},$$

dove $\epsilon^{(1)}, \epsilon^{(2)}, \epsilon^{(3)}$ e $\epsilon^{(4)}$ sono gli errori locali del calcolo di $1-x, \sqrt{x}, 1+\sqrt{x}$ e $f(x)$ rispettivamente. Poiché $\sqrt{x}/(1+\sqrt{x}) < 1$ per ogni x, abbiamo che $|\epsilon_{\text{alg}}^{(2)}| < 4\,u$ e l'algoritmo risulta sempre stabile. Per x grande è comunque da preferire il primo algoritmo perchè in questo caso è limitato da $2u$.

Esercizio 2

(a) L'unico punto fisso dell'equazione $x = g(x)$ è $\alpha = 0$. Infatti, per sostituzione si verifica che $x = 0$ è punto fisso. Per $x \neq 0$ gli eventuali altri punti fissi dovrebbero soddisfare l'equazione $1 = -x^2 e^x$ che non ha soluzioni perché il secondo membro ha sempre segno negativo.

(b) Dallo studio di funzione il grafico risulta



La derivata prima di $g(x)$ è $g'(x) = -x^2\, e^x\, (x+3)$ e si annulla in $x = 0$ e in $x = -3$. Poiché $g'(\alpha) = 0$, e g' è continua, abbiamo convergenza locale. Analizzando $g^{"}(x) = -x\, e^x\, (x^2 + 6x + 6)$ si nota che si annulla in $0, -3 - \sqrt{3} \approx -4.7$, $-3 + \sqrt{3} \approx -1.26$ e che $\max_{x \le 0} |g'(x)| < 1$. Per $x > 0$ si osserva che la derivata prima è decrescente e che il massimo in modulo nell'intervallo $[0, 1/3]$ si ottiene per $x = 1/3$. Abbiamo $|g'(1/3)| = \frac{1}{9}\, e^{1/3} \left(3 + \frac{1}{3}\right) < \frac{4}{9}\frac{3}{2} = \frac{2}{3} < 1$ dove $e^{1/3}$ è stato maggiorato con $3/2$ e $3 + 1/3$ con 4.

Quindi ogni x_0 scelto nell'intervallo $[-1/3, 1/3]$ dà luogo ad una successione convergente. L'ordine di convergenza è 3 poiché $g'(\alpha) = g''(\alpha) = 0$ e $g'''(\alpha) \neq 0$.

Esercizio 3

(a) Il metodo di Gauss è applicabile senza scambio di righe se i determinanti delle matrici principali di testa fino all'ordine $n-1$ sono diversi da zero. Nel nostro caso le matrici principali di testa di dimensione minore o uguale ad $n-1$ sono triangolari superiori con α sulla diagonale. Il determinante del minore di ordine i risulta pertanto $\det(A_i) = \alpha^i$ e quindi la condizione per l'applicabilità del metodo di Gauss è che $\alpha \neq 0$.

(b) Al passo i-esimo si deve annullare un solo elemento perchè la colonna $i - esima$ ha solo l'elemento in posizione n diverso da zero. Quindi ad ogni passo abbiamo bisogno di una divisione (per il pivot) e non sono necessarie moltiplicazioni visto che gli elementi della riga i-esima sono uguali a 1. In totale abbiamo bisogno di $n-1$ divisioni.

(c) La matrice di iterazione del metodo di Gauss-Seidel risulta

$$G = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 0 & \alpha \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\alpha} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1/\alpha & 1/\alpha \end{bmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico risulta

$$p(\lambda) = \lambda \left(\lambda^2 - \frac{\lambda}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^3}\right)$$

e quindi abbiamo che oltre all'autovalore $\lambda = 0$, i restanti autovalori sono

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\alpha}}{2\alpha^2}.$$

Nel caso $1 - 4\alpha < 0$, cioè $\alpha > 1/4$ i due autovalori non nulli sono complessi coniugati. Quindi $\rho(G) = \sqrt{\frac{1}{\alpha^3}}$ e $\rho(G) < 1$ per $\alpha > 1$ (la condizione $|\alpha| > 1$ va intersecata con la condizione $\alpha > 1/4$).

Nel caso di radici reali, cioè per $\alpha \le 1/4$, occorre imporre che $\rho(G) < 1$. Si osserva che nel caso di radici reali $\rho(G) = \frac{1 + \sqrt{1 - 4\alpha}}{2\alpha^2}$. Abbiamo che

$$\frac{1 + \sqrt{1 - 4\alpha}}{2\alpha^2} < 1 \iff \sqrt{1 - 4\alpha^2} < 2\alpha^2 - 1, \quad \alpha \le 1/4. \tag{1}$$

Ponendo $2\alpha^2 - 1 > 0$, e risolvendo la disequazione (**??**) otteniamo che esiste un solo valore $\alpha^* < -1$ soluzione reale di $\alpha^3 - \alpha + 1 = 0$ tale che $\rho(G) < 1$ per $\alpha < \alpha^*$.

Concludendo, abbiamo convergenza del metodo di Gauss Seidel per $\alpha > 1$ o per $\alpha < \alpha^*$.

Esercizio 4

(a) Si nota che la funzione può anche essere scritta come $f(x) = \cos(2\pi x)$. I valori che $f(x)$ assume nei nodi sono $f(-1/4) = 0; f(0) = 1; f(1/2) = -1$ ed il polinomio di interpolazione risulta

$$p(x) = -\frac{32}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 1.$$

(b) Applicando il teorema del resto abbiamo che

$$r(x) = \pi(x)\, \frac{f'''(\xi)}{6}, \quad \pi(x) = x(x + \frac{1}{4})(x - \frac{1}{2}),\ \xi \in [-1/4, 1/2].$$

Osserviamo che $|f'''(\xi)| \le 8\,\pi^3$, e che $\max_{x \in [-1/4, 1/2]} |\pi(x)| = \max\{|\pi((1+\sqrt{7})/12)|, |\pi((1-\sqrt{7})/12)|\} = |\pi(1 + \sqrt{7})/12)| < 0.035$ si ottiene che $|r(x)| \le 0.035\,(8\pi^3)/6 < 1.45$.