Soluzione della prova scritta
di Calcolo Numerico del 8/9/2014

Esercizio 1

L'errore inerente è

$$\epsilon_{in} = c_x\,\epsilon_x, \quad \text{dove} \quad c_x = \frac{x\,f'(x)}{f(x)} = -\frac{1}{x-1}.$$

La funzione c_x non è limitata nell'intorno di 1. Quindi il problema risulta mal condizionato per x vicino a 1.

L'errore algoritmico per il primo algoritmo è

$$\epsilon_{alg}^{(1)} = \epsilon^{(4)} - \epsilon^{(3)} + \epsilon^{(2)} - \frac{x}{x^2-1}\,\epsilon^{(1)},$$

dove $\epsilon^{(1)}$, $\epsilon^{(2)}$, $\epsilon^{(3)}$ e $\epsilon^{(4)}$ sono gli errori locali del quadrato, della addizione, della sottrazione e della divisione. Maggiorando in modulo si ha

$$\left|\epsilon_{alg}^{(1)}\right| < u\left(3 + \frac{|x|}{|x^2-1|}\right).$$

L'errore algoritmico per il secondo algoritmo è

$$\epsilon_{alg}^{(2)} = \epsilon^{(6)} - \epsilon^{(5)},$$

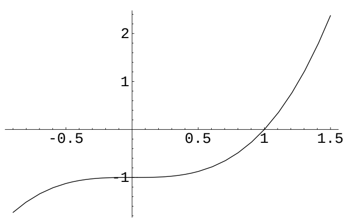
dove $\epsilon^{(5)}$ e $\epsilon^{(6)}$ sono gli errori locali della sottrazione e della divisione. Maggiorando in modulo si ha

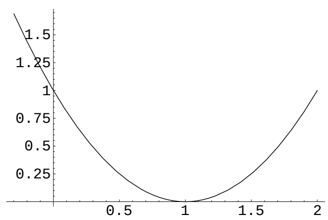
$$\left|\epsilon_{alg}^{(2)}\right| < 2u.$$

Il secondo algoritmo è stabile per ogni x mentre il primo non lo è nell'intorno di -1 e nell'intorno di 1. Quindi il secondo algoritmo è preferibile.

Esercizio 2

I grafici di $f_1(x)$ e $f_2(x)$ sono





Entrambe le equazioni hanno la sola soluzione reale $\alpha = 1$, ma con molteplicità 1 la prima equazione e con molteplicità 2 la seconda equazione. Questa diversa molteplicità ha come conseguenza che il metodo delle tangenti ha ordine 2 se applicato alla prima equazione e 1 se applicato alla seconda equazione.

Per la seconda equazione si ha convergenza per ogni scelta del punto iniziale $x_0 \neq 1$, in quanto $f(x)f''(x) > 0$ per ogni $x \neq 1$.

Per la prima equazione si ha $f(x)f''(x) > 0$ per $x > 1$ e quindi convergenza monotona decrescente per $x_0 > 1$. Per $x_0 < 0$ il metodo delle tangenti produce una successione x_i crescente fintanto che $x_i < 1$, purché non accada che $x_i = 0$ per un qualche i. Detto i' il più grande indice per cui $x_{i'} < 1$, è $x_{i'+1} > 1$, quindi anche in questo caso si ha convergenza. Si conclude che per la prima equazione il metodo delle tangenti converge ad α per ogni x_0, escluso un insieme discreto di punti.

Esercizio 3

La matrice di iterazione di Jacobi è

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico è $p(J) = \det(J - \lambda I) = -\lambda^3 - \lambda/2$. Gli autovalori sono $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_{2,3} = \pm\mathbf{i}/\sqrt{2}$. Quindi $\rho(J) = 1/\sqrt{2} < 1$ e il metodo risulta convergente. La matrice di iterazione di Guass-Seidel è

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

Il polinomio caratterisrico è $p(G) = \det(G - \lambda I) = -\lambda^3 - \lambda^2/2$. Gli autovalori sono $\lambda_{1,2} = 0$ e $\lambda_3 = -1/2$. Quindi $\rho(J) = 1/2 < 1$ e il metodo risulta convergente.

Esercizio 4

(a) È

$$p_1(x) = -\frac{1}{2}\left(3x^2 - 5x + 2\right), \quad p_2(x) = f(x).$$

(b) Quindi

$$r_1(x) = f - p_1(x) = \frac{1}{2}\left(2x^3 - 3x^2 + 2\right), \quad r_2(x) = f - p_2(x) = 0$$

e $r_1'(x) = 3x^2 - 3x + 1/2$. È $r_1'(x) = 0$ per $x_{1,2} = (3 \pm \sqrt{3})/6$. Entrambi questi punti appartengono all'intervallo $[0, 1]$ e si ha

$$\max_{x\in[0,1]} |r_1(x)| = r_1\left(\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right) = \frac{5\sqrt{3}-9}{36} \sim 0.0094.$$

(c) È
$$\int_0^1 f(x) = \int_0^1 p_1(x) = \int_0^1 p_2(x) = -\frac{1}{4}.$$
Si applica la formula dei trapezi alla $f(x)$ con $N = 3$. I nodi sono $x_0 = 0$, $x_1 = 1/3$, $x_2 = 2/3$ e $x_3 = 1$ e si ottiene
$$S = \frac{1}{6}\Big(f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + 2f(x_3)\Big) f(0) = -\frac{1}{6}\frac{5}{3} = -\frac{5}{18}$$
cun un errore di $1/36$.

(d) Applicando la formula dei trapezi su $N + 1$ punti equidistanti, il resto è
$$R_2^{(N)} = -\frac{(b-a)^3}{12N^2} f''(\xi), \quad \xi \in (a, b).$$
Poiché $f''(x) = (x - 1)/6$ è $\max\limits_{x\in[0,1]} |f''(x)| = 6$, si ha $|R_2^{(N)}| < 1/(2N^2)$ e l'errore relativo ϵ è maggiorato da
$$|\epsilon| = \frac{|R_2^{(N)}|}{|\int_0^1 f(x)|} < \frac{2}{N^2}.$$
È $|\epsilon| < 10^{-5}$ per $N \geq 448$.