Soluzione della prima prova parziale
di Calcolo Numerico
8 Novembre 2007

Compito A

Esercizio 1

(a) Per $\mathcal{F}$ si ha

$$\omega_{\mathcal{F}} = 10^{-4}\,(.1) = 10^{-5}, \qquad \Omega_{\mathcal{F}} = 10^{5}\,(.999) = 10^{5}\,(1 - 10^{-3}).$$

Per $\mathcal{G}$ si ha

$$\omega_{\mathcal{G}} = 10^{-4}\,(.001) = 10^{-7}, \qquad \Omega_{\mathcal{G}} = \Omega_{\mathcal{F}}.$$

(b) La cardinalità di $\mathcal{F}$ è $1 + 2(M + m + 1) \cdot 9 \cdot 10^{t-1} = 18001$. I numeri di $\mathcal{G}$ non appartenenti ad $\mathcal{F}$ sono $2(10^2 - 1)$. Quindi la cardinalità di $\mathcal{G}$ è 18199.

(c) Sia $x = 1.4\ 10^{-7} = 10^{-4}\,(.0014)$. In $\mathcal{G}$ è $\widetilde{x} = \mathrm{arr}(x) = 10^{-4}\,(.001) = 10^{-7}$. L'errore relativo è

$$\frac{\widetilde{x} - x}{x} = -\frac{4\ 10^{-8}}{1.4\ 10^{-7}} = -\frac{20}{7}\,10^{-1}.$$

Esercizio 2

(a) Per l'errore analitico si ha

$$\epsilon_{\mathrm{an}} = \frac{\widetilde{f}(x) - f(x)}{f(x)} = -\frac{\dfrac{2}{x+1}}{3x + \dfrac{2}{x+1}} = -\frac{2}{3x(x+1)+2}$$

e quindi

$$|\epsilon_{\mathrm{an}}| = \frac{2}{3(x^2+x)+2} \leq \frac{2}{3\gamma^2} \quad \text{per} \quad x \geq \gamma.$$

(b) Per l'errore inerente si ha

$$\epsilon_{\mathrm{in}} = c_x \epsilon_x, \quad \text{dove} \quad c_x = x\,\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{x}{3x + \dfrac{2}{x+1}}\left(3 - \frac{2}{(x+1)^2}\right).$$

Poiché per $x > 0$ è $\dfrac{x}{3x + \dfrac{2}{x+1}} < \dfrac{x}{3x} < \dfrac{1}{3}$ e $3 - \dfrac{2}{(x+1)^2} < 3$, si ha $|c_x| < 1$. Inoltre $|\epsilon_x| < u$, quindi $|\epsilon_{\mathrm{in}}| < u$.

(c) Per l'errore algoritmico si ha $|\epsilon_{\mathrm{alg}}| < |\epsilon^{(1)}| < u$, dove $\epsilon^{(1)}$ è l'errore relativo del prodotto $3x$.

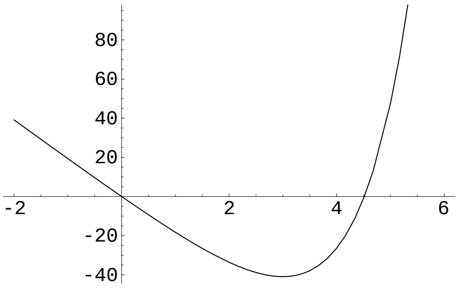
(d) $|\epsilon_{\text{tot}}| = |\epsilon_{\text{an}} + \epsilon_{\text{in}} + \epsilon_{\text{alg}}| < \dfrac{2}{3\gamma^2} + 2u$. Imponendo che tale maggiorazione sia minore di $7u$ si ottiene

$$\gamma^2 > \frac{2}{15}\,10^4, \quad \text{quindi} \quad \gamma > 36.5$$

(e) Basta che sia $u = \frac{1}{2}\,2^{1-t} \leq 10^{-4}$, quindi $t \geq 4\log_2 10 = 13.28$. Perciò il valore minimo di t è 14.

Esercizio 3

(a) Disegnando il grafico di $f(x)$ si vede che $\alpha \in (4,5)$. Infatti $f(4) = -26.4$ e $f(5) = 47.4$. Quindi $n = 4$.



(b) Dopo s passi l'errore relativo ϵ risulta maggiorato da

$$|\epsilon| = \frac{|\widetilde{\alpha} - \alpha|}{|\alpha|} < \frac{|\widetilde{\alpha} - \alpha|}{4} \leq \frac{2^{-s}}{4} = 2^{-(s+2)}.$$

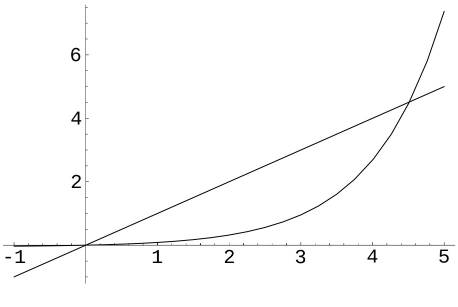
Imponendo che dopo s passi l'errore relativo sia $\leq 10^{-6}$, si ha

$$s \geq \log_2 10^6 - 2 \sim 17.9$$

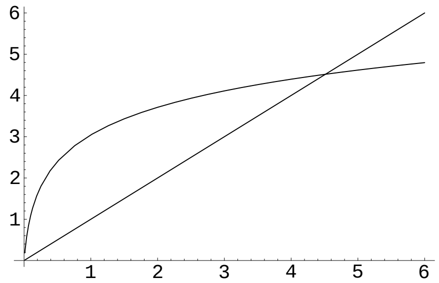
Quindi bastano 18 passi del metodo di bisezione.

(c) È $f'(x) = \mathrm{e}^x - 20$. Quindi $\beta = \log 20 \sim 2.99$ è il punto di minimo. Perciò il metodo delle tangenti converge ad α per $x_0 > \beta$, in modo monotono a partire da x_0 se $x_0 > \alpha$, da x_1 se $x_0 < \alpha$. L'ordine di convergenza è 2.

d) Dal grafico delle due funzioni $y = x$ e $y = g(x) = (\mathrm{e}^x - 1)/k$ risulta evidente che non vi è convergenza alla soluzione α.



e) Dal grafico delle due funzioni $y = x$ e $y = g(x) = \log(1 + kx)$ risulta che vi è convergenza alla soluzione α a partire da qualunque $x_0 > 0$. L'ordine di convergenza è 1.



f) Il metodo delle tangenti ha ordine di convergenza 2, quindi è il migliore. Fra il metodo di bisezione e il metodo definito da $g(x) = \log(1+kx)$, entrambi di ordine 1, il migliore risulta quest'ultimo, in quanto il suo fattore di convergenza γ verifica

$$\gamma = g'(\alpha) < g'(4) = 20/81,$$

che è minore del fattore di convergenza 1/2 del metodo di bisezione.