Soluzione della prima prova parziale di Calcolo Numerico
8 Aprile 2015

Compito A

Esercizio 1

(a) Con t cifre, il più piccolo numero di F maggiore di 1 e il più grande numero di F minore di 2 sono

$$x_1 = 1.0\ldots01, \quad \text{e} \quad x_2 = 1.1\ldots11.$$

L'insieme delle parti frazionarie è quindi costituito da tutti i numeri rappresentati in base due con $t-1$ cifre compresi fra 1_2 e $1\ldots1_2 = 2^{t-1}-1$ e quindi contiene $2^{t-1}-1$ elementi. Tenendo conto anche dei due estremi 1 e 2 dell'intervallo considerato, il numero totale di elementi contenuti risulta $2^{t-1}+1$.

(b) Il punto medio è $x = 3/2 = 1.1_2$. Quindi appartiene a F se $t \geq 2$ e $M \geq 1$ (quest'ultima condizione è certamente verificata, visto che si suppone che $2 \in F$).

(c) I numeri $3/2^i$ hanno la rappresentazione $(0.11)_2\ 2^{-i+2}$, per $i = 1, 2, \ldots$. Quindi la mantissa richiede 2 bit. L'esponente $-i+2$ deve verificare la relazione $-m \leq -i+2 \leq M$. Questi numeri appartengono ad F purché $t \geq 2$ e $i \geq m$ se $i \geq 2$ e $M \geq 1$ se $i = 1$.

Esercizio 2

L'errore inerente è

$$\epsilon_{in} = c_x\,\epsilon_x, \quad \text{dove} \quad c_x = \frac{x\,f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{(x-1)\log((x-1)/x)}.$$

Poiché

$$\lim_{x\to 1^+}(x-1)\log((x-1)/x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty}(x-1)\log((x-1)/x) = -1,$$

il problema risulta malcondizionato nell'intorno destro di 1. L'errore algoritmico per il primo algoritmo è

$$\epsilon_{alg}^{(1)} = \epsilon^{(3)} + \frac{1}{f(x)}\,(\epsilon^{(2)} + \epsilon^{(1)}),$$

dove $\epsilon^{(1)}$ e $\epsilon^{(2)}$ sono gli errori locali di $x-1$ e $(x-1)/x$, e $\epsilon^{(3)}$ è l'errore locale del calcolo del logaritmo. Quindi $\left|\epsilon_{alg}^{(1)}\right|$ è superiormente limitato nell'intorno destro di 1 e non è superiormente limitato per x grande. Per il secondo algoritmo si ha

$$\epsilon_{alg}^{(2)} = \epsilon^{(4)} + \frac{1}{f(x)}\Big(-\epsilon^{(3)}\log x + \log(x-1)\,(\epsilon^{(2)} + \frac{1}{\log(x-1)}\,\epsilon^{(1)})\Big),$$

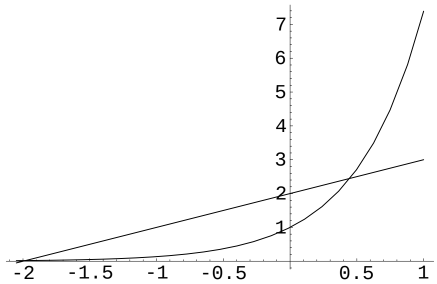
dove $\epsilon^{(1)}$, $\epsilon^{(2)}$ e $\epsilon^{(3)}$ sono gli errori locali del calcolo di $x-1$, $\log(x-1)$ e $\log x$, e $\epsilon^{(4)}$ è l'errore locale dell'ultima sottrazione. Maggiorando si ha

$$\left|\epsilon_{alg}^{(2)}\right| < u\big(1 + \frac{1}{|f(x)|}\Big(|\log x| + |\log(x-1)| + 1\big)\Big).$$

Poiché tutti i termini della somma sono limitati nell'intorno di 1, ma non per x grande, anche $\left|\epsilon_{alg}^{(2)}\right|$ è superiormente limitato nell'intorno destro di 1 e non è superiormente limitato all'infinito. Confrontando i due errori algoritmici, appare che i due algoritmi sono sostanzialmente equivalenti dal punto di vista della stabilità.

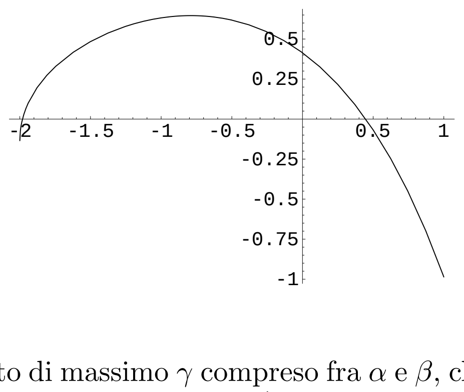
Esercizio 3

(a) Conviene scrivere l'equazione nella forma $\sqrt{x+2} = \mathrm{e}^x$. Entrambi i membri sono positivi, quindi si può elevare al quadrato, e si ottiene $x+2 = \mathrm{e}^{2x}$ per $x \geq -2$. Dalla figura risulta che vi sono due soluzioni $\alpha \in (-2,-1)$



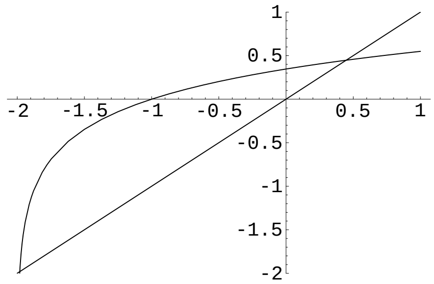
e $\beta \in (0,1)$, entambe di molteplicità 1.

(b) Sfruttando l'informazione trovata, si disegna il grafico di $f(x)$ Risulta



che vi è un solo punto di massimo γ compreso fra α e β, che in -2 la funzione non è derivabile e che $f''(x) = -\mathrm{e}^x - \frac{1}{4(x+2)^{3/2}}$ è sempre negativa per $x > -2$. Per la convergenza del metodo delle tangenti ad α si deve scegliere un punto x_0 nel piccolissimo intervallo a sinistra di α, per la soluzione β invece si può scegliere qualunque punto a destra di γ. L'ordine di convergenza è 2.

(c) Sfruttando l'informazione trovata al punto (a), si disegna il grafico della retta $y = x$ e della funzione $g(x) = \log(x + 2)/2$



Risulta evidente che non vi è convergenza ad α e che vi è convergenza monotona del primo ordine a β per ogni $x_0 > \alpha$.

Compito B

Lo svolgimento dell'esercizio 1 è sostanzialmente uguale a quello del compito A.

Esercizio 2

L'errore inerente è

$$\epsilon_{in} = c_x\, \epsilon_x, \quad \text{dove} \quad c_x = \frac{x\, f'(x)}{f(x)} = x + \frac{1}{x}.$$

Il problema risulta malcondizionato nell'intorno dell'origine e per $|x|$ grande. L'errore algoritmico per il primo algoritmo è

$$\epsilon_{alg}^{(1)} = \epsilon^{(4)} + \big(x - \frac{1}{x}\big)\,\big(\epsilon^{(3)} + \epsilon^{(2)}\big) + x\,\epsilon^{(1)},$$

dove $\epsilon^{(1)}$, $\epsilon^{(2)}$ e $\epsilon^{(3)}$ sono gli errori locali di x^2, $x^2 - 1$ e $(x^2-1)/x$, e $\epsilon^{(4)}$ è l'errore locale del calcolo dell'esponenziale. Quindi $\big|\epsilon_{alg}^{(1)}\big|$ non è superiormente limitato nell'intorno dell'origine e per $|x|$ grande. Per il secondo algoritmo si ha

$$\epsilon_{alg}^{(2)} = \epsilon^{(4)} + \epsilon^{(1)} - \big(\epsilon^{(3)} + \frac{1}{x}\,\epsilon^{(2)}\big),$$

dove $\epsilon^{(1)}$, $\epsilon^{(2)}$ e $\epsilon^{(3)}$ sono gli errori locali del calcolo di e^x, $1/x$ e $\mathrm{e}^{1/x}$, e $\epsilon^{(4)}$ è l'errore locale dell'ultima divisione. Maggiorando si ha

$$\big|\epsilon_{alg}^{(2)}\big| < u\big(3 + \frac{1}{|x|}\big).$$

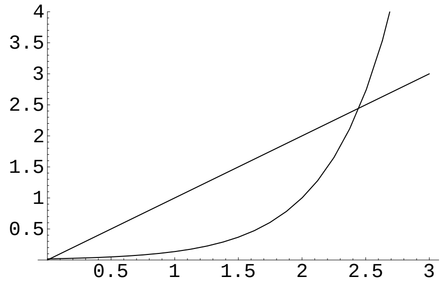
Quindi $\big|\epsilon_{alg}^{(2)}\big|$ non è superiormente limitato nell'intorno dell'origine. Confrontando i due errori algoritmici, appare che il secondo algoritmo è preferibile.

Esercizio 3

(a) Si nota come questa equazione può essere trasformata in quella studiata nel compito A con la traslazione di variabile $x \mapsto x+2$. Risulta quindi che vi sono due soluzioni $\alpha \in (0,1)$ e $\beta \in (2,3)$, entambe di molteplicità 1.

(b) Per la convergenza del metodo delle tangenti ad α si deve scegliere un punto x_0 nel piccolissimo intervallo a sinistra di α, per la soluzione β invece si può scegliere qualunque punto a destra del punto di massimo. L'ordine di convergenza è 2.

(c) Per il metodo iterativo $x_{i+1} = \mathrm{e}^{2(x_i-2)}$, dalla figura risulta che non vi è convergenza a β e vi è convergenza monotona del primo ordine ad α per ogni x_0 compreso fra 0 e β (escluso).


4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0.5
1
1.5
2
2.5
3