Soluzione della prova scritta di Calcolo Numerico del 9/02/ 2009

Esercizio 1

a) Elevando la prima espressione al quadrato si ha $x - \sqrt{x^2-4}$, ed elevando la seconda espressione al quadrato si ha

$$\left(\frac{x}{2}+1\right)+\left(\frac{x}{2}-1\right)-2\sqrt{\frac{x}{2}+1}\sqrt{\frac{x}{2}-1}=x-\sqrt{x^2-4}.$$

b) Per l'errore inerente si ha

$$\epsilon_{in}=c_x\epsilon_x, \quad \text{dove} \quad c_x=-\frac{x}{2\sqrt{x^2-4}}.$$

Quindi vi è malcondizionamento solo per x nell'intorno destro di 2.

c) Per il primo algoritmo si ha

$$|\epsilon_{alg}^{(1)}|\le u\left(\frac{3}{2}+\frac{x^2-3}{\sqrt{x^2-4}\,(x-\sqrt{x^2-4})}\right)=\left(\frac{3}{2}+\frac{(x^2-3)(x+\sqrt{x^2-4})}{4\sqrt{x^2-4}}\right).$$

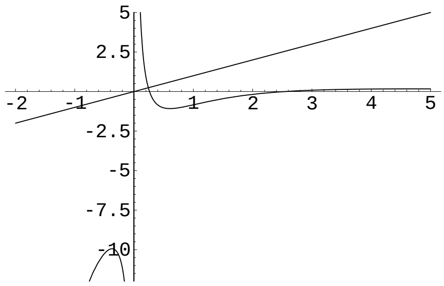
Per il secondo algoritmo si ha

$$|\epsilon_{alg}^{(2)}|\le u\left(1+\frac{3}{2}\,\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}}\right)=u\left(1+\frac{3}{4}\,(x+\sqrt{x^2-4})\right).$$

La prima maggiorazione non è limitata in un intorno destro di 2 e per x grande si comporta come x^2. La seconda maggiorazione è limitata in un intorno destro di 2 e per x grande si comporta come x. Quindi il secondo algorimo è preferibile.

Esercizio 2

Dal grafico



risulta evidente che vi è un'unica soluzione $\alpha > 0$. Un'indagine più accurata permette di dire che $\alpha < \overline{x}$, dove $\overline{x} < 0.5$ è il primo punto in cui $g(x)$ si annulla. Il teorema del punto fisso non può essere applicato a nessuno dei tre intervalli indicati. Per un $x < 0$ è $g(x) < x$, quindi ogni successione generata dal metodo diverge se accade che $x_i < 0$ per un i qualsiasi. Questo accade per l'intervallo (a) dal punto iniziale e per l'intervallo (b) da x_1. L'intervallo (c), a differenza degli altri due, contiene la soluzione α, però è $g'(\alpha) < -1$ quindi α non è un punto attrattivo. Ne segue che se anche x_0 è vicino ad α, x_1 se ne allontana. Fra i successivi punti generati non vi potrà mai essere α in quanto $g(x)$ assume il valore α solo in α. Quindi non si possono ottenere successioni convergenti ad α a meno che sia $x_0 = \alpha$.

Esercizio 3

Indicato con $\boldsymbol{y}$ il vettore

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

si ha

$$P = \boldsymbol{v}^T \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 12 & 16 \\ -3 & -6 & -9 & -12 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

a) Per trovare gli autovalori di P si può: o calcolare il polinomio caratteristico, che risulta $p(\lambda) = \lambda^4$, oppure notare che P è una diade con la traccia uguale a zero. In ogni caso risulta che tutti gli autovalori sono nulli e quindi $\rho(P) = 0$.

b) Per trovare gli autovettori $\boldsymbol{z}$ si pone

$$P\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}, \qquad \boldsymbol{z} \neq \boldsymbol{0}.$$

Le prime tre righe sono multiple dell'ultima, che dà

$$z_1 + 2z_2 + 3z_3 + 4z_4 = 0.$$

Quindi vi sono solo tre autovettori linearmente indipendenti, della forma

$$\boldsymbol{z}^{(1)} = k \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{z}^{(2)} = h \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{z}^{(3)} = j \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad k,\ h,\ j \neq 0.$$

La matrice non è diagonalizzabile.

c) Si ottiene

$$\boldsymbol{x}^{(1)} = \boldsymbol{q}, \quad \boldsymbol{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 41 \\ -29 \\ 21 \\ -9 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}^{(3)} = \boldsymbol{x}^{(2)}.$$

d) Poiché $\rho(P) < 1$ il metodo iterativo risulta convergente. Inoltre è $\boldsymbol{x}^{(i+1)} = \boldsymbol{x}^{(i)}$ per ogni $i \geq 2$. Quindi $\lim_{i\to\infty} \boldsymbol{x}^{(i)} = \boldsymbol{x}^{(2)}$. Ne segue che $\boldsymbol{x}^{(2)}$ è la soluzione del sistema $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{x} + \boldsymbol{q}$. Formalmente si ha

$$\boldsymbol{x}^{(0)} = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{x}^{(1)} = \boldsymbol{q}, \quad \boldsymbol{x}^{(2)} = P\boldsymbol{q} + \boldsymbol{q}, \quad \boldsymbol{x}^{(3)} = P^2\boldsymbol{q} + P\boldsymbol{q} + \boldsymbol{q}.$$

Poiché $\boldsymbol{x}^{(2)} = \boldsymbol{x}^{(3)}$, deve essere $P^2\boldsymbol{q} = \mathbf{0}$, malgrado $\boldsymbol{q}$ sia diverso da zero. È facile verificare direttamente che $P^2 = O$. Ne segue che $\boldsymbol{x}^{(2)}$ resta lo stesso qualunque vettore $\boldsymbol{x}^{(0)}$ si prenda.

Esercizio 4

In tutti i nodi la funzione vale 1. Quindi i punti sono allineati e il polinomio di interpolazione è $p(x) = 1$. Il resto è $r(x) = f(x) - p(x) = \cos(2\pi x) - 1$. Il massimo modulo risulta 2.