Soluzione della prova scritta
di Calcolo Numerico del 9/09/ 2009

Esercizio 1

Operando in $\mathcal{F}(2, 3, m, M)$ con arrotondamento si ha

$$
\begin{aligned}
&x_0 = 10.1_2 = (0.101)_2 \times 2^2, \quad \widetilde{x}_0 = x_0,\\
&z_1 = \widetilde{x}_0 \otimes \widetilde{x}_0 = 110.01_2 = (0.11001)_2 \times 2^3, \quad \widetilde{z}_1 = (0.110)_2 \times 2^3,\\
&z_2 = \widetilde{z}_1 \oplus 4 = (0.110)_2 \times 2^4, \quad \widetilde{z}_2 = z_2,\\
&z_3 = 2 \otimes \widetilde{x}_0 = (0.101)_2 \times 2^3, \quad \widetilde{z}_3 = z_3,\\
&z_4 = \widetilde{z}_2 \oslash \widetilde{z}_3 = 2_{10} = (0.1)_2 \times 2, \quad \widetilde{z}_4 = z_4.
\end{aligned}
$$

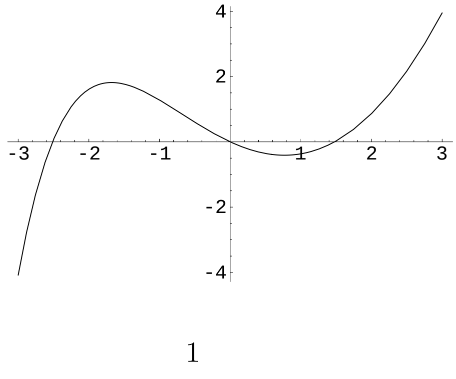
Il valore $\widetilde{z}_4 = 2$ è quello ottenuto per x_1 in $\mathcal{F}(2, 3, m, M)$ con arrotondamento. Ripetendo i calcoli a partire da questo valore si ottiene ancora 2 per x_2. Se invece si operasse in aritmetica esatta avremmo

$$x_1 = \frac{41}{20} = 2 + \frac{1}{20}, \quad x_2 = \frac{3281}{1640} = 2 + \frac{1}{1640}.$$

Quindi operando in $\mathcal{F}(2, 3, m, M)$ con arrotondamento si ottiene il valore esatto della soluzione fin dalla prima iterazione, mentre in aritmetica esatta si ottengono valori approssimati, il cui errore è $1/20$ alla prima iterazione, $1/1640$ alla seconda iterazione. Si noti che operando in aritmetica esatta non si otterrà mai il valore esatto della soluzione.

Esercizio 2

a) La funzione $f(x)$ si annulla in $x = 0$. In un piccolo intorno dello zero la funzione e^{-x} si comporta come $1 - x$, quindi $f(x)$ si comporta come $x^2 - x$, ed è positiva per $x < 0$ e negativa per $x > 0$. Per $x > 0$ grande, la $f(x)$ assume valori positivi e per $x < 0$ di modulo grande, la $f(x)$ assume valori negativi. Quindi ci si possono aspettare altre due soluzioni, una positiva e una negativa. Non è possibile che ci siano più di 3 soluzioni, in quanto la derivata seconda della $f(x)$, che è $2 - \mathrm{e}^{-x}$, si annulla nel solo punto $s = -\log 2 \sim -0.69$. Il grafico di $f(x)$ risulta allora



Pertanto, oltre alla soluzione $\alpha = 0$ vi sono le due soluzioni $-3 < \beta < -2$ e $1 < \gamma < 2$.

b) Per la convergenza a β si può scegliere un qualunque punto x_0 a sinistra del punto di massimo. Per la convergenza a γ si può scegliere un qualunque punto x_0 a destra del punto di minimo. Per quanto riguarda α, la convergenza è garantita solo se si sceglie un punto x_0 compreso fra s (punto di flesso) e 0. Tutte e tre le soluzioni hanno molteplicità 1 e in nessuna di esse si annulla la derivata seconda, quindi il metodo delle tangenti converge in ogni caso con ordine 2.

Esercizio 3

La matrice A è data da

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

a) I due cerchi di Gerschgorin relativi alla prima e terza riga hanno centro in 1 e raggio 3/4. Quindi sono interni al cerchio relativo alla seconda riga che ha centro in 1 e raggio 1. I tre autovalori, che sono reali perché la matrice è simmetrica, risultano perciò compresi fra 0 e 2.

b) La matrice

$$B = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 1/4 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{bmatrix}$$

ha rango 2, quindi ha un autovalore nullo. Il suo polinomio caratteristico è

$$p(\lambda) = \lambda \left(\lambda^2 - \frac{3}{4}\lambda - \frac{3}{8}\right),$$

e i suoi autovalori sono

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_{2,3} = \frac{3 \pm \sqrt{33}}{8}.$$

c) Gli autovalori di A si ottengono sommando 3/4 agli autovalori di B, quindi sono

$$\mu_1 = \frac{3}{4}, \quad \mu_{2,3} = \frac{9 \pm \sqrt{33}}{8}.$$

Gli autovalori di A^{-1} sono i reciproci di questi, quindi

$$\nu_1 = \frac{4}{3}, \quad \nu_{2,3} = \frac{9 \pm \sqrt{33}}{6}.$$

Esercizio 4

Il polinomio di interpolazione è

$$p(x) = -\frac{1}{99}\left(10x^2 - 121x + 111\right).$$

Il resto è

$$r(x) = f(x) - p(x) = \left(x - \frac{1}{10}\right)(x-1)(x-10)\,\frac{f'''(\xi)}{3!}, \quad \text{dove} \quad \xi \in \left(\frac{1}{10}, 10\right).$$

Poiché

$$f'''(x) = \frac{2}{x^3 \log 10},$$

si ha

$$\frac{|f'''(\xi)|}{3!} < \frac{1000}{3 \log 10} \sim 145.$$

È facile verificare graficamente che nell'intervallo di interpolazione il polinomio $\left(x - \frac{1}{10}\right)(x-1)(x-10)$ assume il suo massimo modulo fra 1 e 10. Quindi

$$\max_{x \in (1/10,1)} |r(x)| \leq \left|10 - \frac{1}{10}\right| |10-1|\, |1-10| < 802.$$

Perciò il resto è maggiorato da 116290.