Soluzione della prova scritta
di Calcolo Numerico del 9/1/2013

Esercizio 1

Si considera $|x| \neq \sqrt{2}$, altrimenti sarebbe $f(x) = 0$, e l'errore relativo non sarebbe definito. L'errore inerente è dato da

$$\epsilon_{in} = c_x \epsilon_x, \quad \text{dove} \quad c_x = \frac{4}{x^2 - 2}.$$

Pertanto il calcolo di $f(x)$ è malcondizionato negli intorni dei punti $\pm\sqrt{2}$.
Non è malcondizionato nell'intorno di 0.
Per l'algoritmo $f(x) = 1 - 2/x^2$ si ha

$$\epsilon_{\text{alg}}^{(1)} = \epsilon^{(3)} - \frac{2/x^2}{f(x)}\big(\epsilon^{(2)} - \epsilon^{(1)}\big)$$

dove $\epsilon^{(1)}$, $\epsilon^{(2)}$ e $\epsilon^{(3)}$ sono gli errori locali del calcolo di x^2, $2/x^2$ e della sottrazione finale. Maggiorando in modulo gli errori locali con u si ha

$$|\epsilon_{\text{alg}}^{(1)}| < u\Big(1 + \frac{4}{|x^2 - 2|}\Big).$$

Quindi questo algoritmo non è stabile negli intorni dei punti $\pm\sqrt{2}$.
Per l'algoritmo $f(x) = (x^2 - 2)/x^2$ si ha

$$\epsilon_{\text{alg}}^{(2)} = \epsilon^{(5)} - \epsilon^{(1)} + \epsilon^{(4)} + \frac{x^2}{x^2 - 2}\epsilon^{(1)} = \epsilon^{(5)} + \epsilon^{(4)} + \frac{2}{x^2 - 2}\epsilon^{(1)}$$

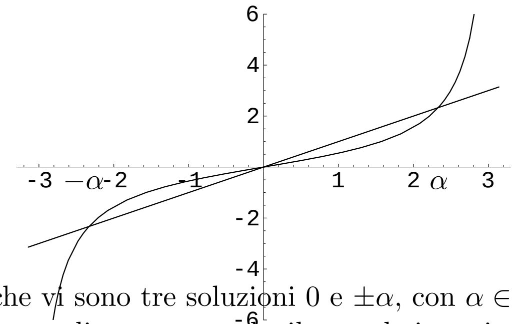
dove $\epsilon^{(1)}$, $\epsilon^{(4)}$ e $\epsilon^{(5)}$ sono gli errori locali del calcolo di x^2, $x^2 - 2$ e della divisione finale. Maggiorando in modulo gli errori locali con u si ha

$$|\epsilon_{\text{alg}}^{(2)}| < u\Big(2 + \frac{2}{|x^2 - 2|}\Big).$$

Anche questo algoritmo non è stabile negli intorni dei punti $\pm\sqrt{2}$. Al di fuori di questi intorni i due algoritmi sono entrambi stabili. Per $|x|$ grande la limitazione di $|\epsilon_{\text{alg}}^{(1)}|$ è migliore di quella di $|\epsilon_{\text{alg}}^{(2)}|$.

Esercizio 2

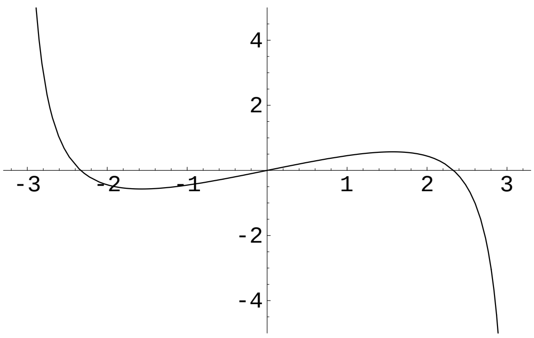
Dal grafico di $y = \tan(x/2)$ e $y = x$



risulta evidente che vi sono tre soluzioni 0 e $\pm\alpha$, con $\alpha \in [2, 3]$.
(b) Il grafico mostra direttamente che il metodo iterativo $x_{i+1} = g(x_i)$ non è convergente alle soluzioni $\pm\alpha$, mentre è convergente alla soluzione 0 se si sceglie un x_0 tale che $|x_0| < \alpha$. Poiché $g'(0) = 1/2$ l'ordine di convergenza è 1.
(a) La $f(x) = x - g(x)$ ha due punti stazionari $\pm\beta$ e un punto di flesso γ. Infatti

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{2\cos^2(x/2)} \quad \text{e} \quad f''(x) = -\frac{\sin(x/2)}{2\cos^3(x/2)},$$

quindi $\beta = \pi/2$ e $\gamma = 0$. Il grafico di $f(x)$ è



Per quanto riguarda le soluzioni $\pm\alpha$, si ha convergenza alla soluzione α partendo da un x_0 tale $\alpha < x_0 < \pi$ e, simmetricamente, a $-\alpha$ da $-\pi < x_0 < -\alpha$, con ordine 2. Questi intervalli possono essere un po' ampliati, includendo anche punti al di là della soluzione, senza però arrivare trppo vicini ai punti stazionari. Infatti se si sceglie x_0 troppo vicino al punto stazionario c'è il rischio che la tangente vada a cadere fuori dall'intervallo $(-\pi, \pi)$.
Per quanto riguarda la soluzione 0, poiché in 0 è $f'(0) \neq 0$ e $f''(0) = 0$, c'è convergenza locale a 0 di ordine maggiore o uguale a 3 (più esattamente 3 perché si può verificare che $f'''(0) \neq 0$). È più delicato determinare un intervallo $(-\delta, \delta)$ in cui scegliere x_0 per ottenere una successione convergente a 0. Dal grafico della $f(x)$ risulta evidente che δ debba essere un punto tale che $\delta - f(\delta)/f'(\delta) = -\delta$, cioè un punto di partenza per cui il metodo delle tangenti genera un ciclo. La ricerca di una approssimazione di δ (che vale

~ 1.3) esula da quanto richiesto dall'esercizio. Basta trovare x_0 per cui il metodo delle tangenti genera un punto x_1 con $|x_1| < |x_0|$. Per esempio, assumendo $x_0 = \pi/3 \sim 1.05$ si ha

$$x_1 = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi/3 - \tan(\pi/6)}{1 - \dfrac{1}{2\cos^2(\pi/6)}} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi/3 - \sqrt{3}/3}{1 - \dfrac{1}{3/2}} = \frac{\pi}{3} - 3(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}) \sim -0.36$$

Quindi per ogni $|x_0| \leq \pi/3$ il metodo delle tangenti converge a 0.

Esercizio 3

(a) Se il metodo iterativo $\boldsymbol{x}^{(k+1)} = (A+I)\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{b}$ fosse convergente, detto $\widehat{\boldsymbol{x}}$ il limite della successione generata, si avrebbe $\widehat{\boldsymbol{x}} = (A+I)\widehat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{b}$, da cui $A\widehat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b}$, quindi $\widehat{\boldsymbol{x}}$ sarebbe soluzione del sistema dato. Per vedere se effettivamene il metodo converge, si cerca il raggio spettrale della matrice di iterazione, cioè $\rho(A+I)$. Il polinomio caratteristico di A è

$$p(A) = \frac{1}{4} + \frac{3\lambda}{4} - \lambda^3 = -(\lambda - 1)\big(\lambda + \frac{1}{2}\big)^2.$$

Gli autovalori di A sono 1 e $-1/2$ con molteplicità 2 e gli autovalori di $A+I$ sono 2 e $1/2$ con molteplicità 2. Quindi $\rho(A+I) = 2$ e il metodo non converge.

(b) Per il metodo di Jacobi la matrice di iterazione è

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & -9/4 \\ 0 & -1/2 & 0 \end{bmatrix}.$$

e il polinomio caratteristico è

$$p_J(A) = -\frac{1}{4} + \frac{9\lambda}{8} - \lambda^3.$$

Per vedere se le radici hanno tutte modulo minore di 1, conviene fare una separazione grafica intersecando la cubica $y = \lambda^3$ e la retta $y = 9\lambda/8 - 1/4$. Risulta che vi sono 3 radici reali, di cui la minore è compresa fra $-3/2$ e -1. Infatti $p_J(-3/2) = 23/16$ e $p_J(-1) = -3/8$. Quindi $\rho(J) > 1$ e il metodo di Jacobi non converge.

Per il metodo di Gauss-Seidel la matrice di iterazione è

$$G = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 9/4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 9/4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & -7/4 \\ 0 & 0 & 7/8 \end{bmatrix}.$$

I suoi autovalori sono 0 di molteplicità 2 e 7/8. Quindi $\rho(G) = 7/8$ e il metodo di Gauss-Seidel converge.

Esercizio 4

a) È $f(x_0) = 1$, $f(x_1) = 1/2$, $f(x_2) = 1/4$ e $f(x_3) = 0$. Il polinomio di interpolazione risulta

$$p(x) = 18\,x^3 - \frac{27}{2}\,x^2 + \frac{1}{4}\,x + 1.$$

(b) Il resto è

$$r(x) = \pi(x)\,\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}, \quad \text{dove} \quad \pi(x) = x\big(x - \frac{1}{4}\big)\big(x - \frac{1}{3}\big)\big(x - \frac{1}{2}\big), \quad \xi \in \big(0, \frac{1}{2}\big).$$

Si ha

$$f(x) = \cos^2(\pi x), \quad f'(x) = -2\pi\cos(\pi x)\sin(\pi x) = -\pi\sin(2\pi x),$$

$$f''(x) = -2\pi^2\cos(2\pi x), \quad f'''(x) = 4\pi^3\sin(2\pi x), \quad f^{(4)}(x) = 8\pi^4\cos(2\pi x).$$

Quindi

$$\max_{x\in[0,1/2]}\Big|\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\Big| \le \frac{8\pi^4}{4!} = \frac{\pi^4}{3}.$$

Per determinare una maggiorazione in $[0,1/2]$ di $|\pi(x)|$ non si può sfruttare l'informazione che il punto di massimo si deve trovare nel primo o nell'ultimo intervallo, perché i nodi non sono equidistanti. Se il punto di massimo fosse nel primo intervallo si avrebbe

$$|\pi(x)| \le \frac{1}{4}\max_{x\in[0,1/4]}\big|x - \frac{1}{4}\big|\,\big|x - \frac{1}{3}\big|\,\big|x - \frac{1}{2}\big| \le \frac{1}{96}.$$

Se il punto di massimo fosse nel secondo intervallo si avrebbe

$$|\pi(x)| \le \Big(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\Big)^2 \max_{x\in[1/4,1/3]} x\,\big|x - \frac{1}{2}\big| \le \frac{1}{12^3}.$$

Se il punto di massimo fosse nel terzo intervallo si avrebbe

$$|\pi(x)| \le \frac{1}{6}\max_{x\in[1/3,1/2]} x\,\big|x - \frac{1}{4}\big|\,\big|x - \frac{1}{3}\big| \le \frac{1}{2\cdot 12^2}.$$

Quindi

$$|\pi(x)| \le \frac{1}{96} \quad \text{e} \quad \frac{1}{96}\,\frac{\pi^4}{3} \sim 0.3382$$

Per ottenere una maggiorazione di $|\pi(x)|$ si potrebbe anche svolgere il prodotto e procedere nel modo seguente

$$|\pi(x)| = \Big|x^4 - \frac{13x^3}{12} + \frac{3x^2}{8} - \frac{x}{24}\Big| \le x^4 + \frac{3x^2}{8} \le \frac{1}{2^4} + \frac{3}{32} = \frac{5}{32}.$$

Questa maggiorazione è meno accurata della precedente.