Soluzione della prova scritta
di Calcolo Numerico del 9/6/ 2008

Esercizio 1

(a) Per l'errore inerente si ha

$$\epsilon_{in} = c_x \epsilon_x, \quad \text{dove} \quad c_x = \frac{x f'(x)}{f(x)} = \frac{x(3x^2+2x+2)}{(x^2+2)(x+1)}.$$

Quindi il problema del calcolo di $f(x)$ è malcondizionato nell'intorno di -1.

(b) Per il primo algoritmo si ha

$$|\epsilon_{alg}^{(1)}| < u\Big[3 + \frac{x^2}{x^2+2}\Big] < 4\,u,$$

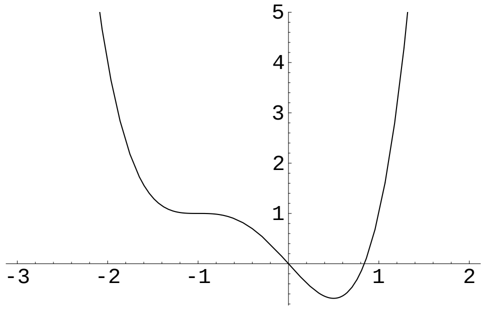
dove u è la precisione di macchina. Per il secondo algoritmo si ha

$$|\epsilon_{alg}^{(2)}| < u\Big(1 + \frac{2|x|\,\big(|(x+1)x+2| + |x+1|\big)}{(x^2+2)\,|x+1|}\Big).$$

Il primo algoritmo è stabile per ogni x, mentre il secondo non lo è nell'intorno di -1. Quindi in generale il primo algoritmo è preferibile. Comunque al di fuori dell'intervallo circolare $\mathcal{C}$ di centro -1 e raggio 1 anche il secondo algoritmo ha un errore maggiorato in modulo da $4u$, pertanto i due algoritmi sono equivalenti dal punto di vista della stabilità se $x \notin \mathcal{C}$.

Esercizio 2

La derivata prima $f'(x) = 2(x+1)^2(2x-1)$ si annulla nei punti $d_1 = -1$ e $d_2 = 1/2$. Inoltre è negativa per $x < d_2$ e positiva per $x > d_2$. Quindi la funzione $f(x)$ è decrescente per $x < d_2$ e crescente per $x > d_2$. Poiché $f(0) = 0$, non vi può essere che un'altra soluzione reale positiva. Entrambe le soluzioni hanno molteplicità 1. Il punto d_2 è di minimo. Vi sono due punti di flesso, d_1 con tangente orizzontale e lo zero con tangente obliqua. Si disegna il grafico di $f(x)$



(a) Se $x_0 \in \mathcal{I}_1$ si ha convergenza ad α. Infatti se si pone $x_0 = -1/2$ il metodo delle tangenti dà $x_1 = 5/16$ e $x_2 \sim -1/9$. Continuando si ottiene una successione convergente ad α. Scegliendo come x_0 un qualunque punto in $(-1/2, 5/16)$ si ottiene una successione convergente.

Non tutte le successioni ottenute scegliendo $x_0 \in \mathcal{I}_2$ sono convergenti ad α. Infatti in tale intervallo vi sono punti x_0 tali che x_1 risulta arbitrariamente vicino a -1 e x_2 risulta maggiore di β. Lo stesso ragionamento esclude la convergenza in $\mathcal{I}_3$.

Non tutte le successioni ottenute scegliendo $x_0 \in \mathcal{I}_4$ sono convergenti a β. Infatti in tale intervallo vi sono punti x_0 tali che x_1 risulta appartenere a $\mathcal{I}_1$ e si è visto sopra che in questo caso la successione converge ad α. Lo stesso ragionamento esclude la convergenza in $\mathcal{I}_5$.

Scegliendo come x_0 un qualunque punto di $\mathcal{I}_6$ si ha convergenza a β. Infatti se $x_0 > \beta$ valgono le condizioni sufficienti di convergenza monotona, mentre se $x_0 < \beta$ risulta $x_1 > \beta$.

(b) Sì, infatti si sa che il metodo delle tangenti ha convergenza locale alle soluzioni di molteplicità 1. In particolare, $\mathcal{I}_1$ e $\mathcal{I}_6$ rispondono alla richiesta. La successione ottenuta partendo da un $x_0 \in \mathcal{I}_1$ converge ad α con ordine 3, la successione ottenuta partendo da un $x_0 \in \mathcal{I}_6$ converge a β con ordine 2.

Esercizio 3

(a) Ad esempio, per $n = 4$ si ha

$$A = \begin{bmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 0 & 0 \\ 1 & 0 & k & 0 \\ 1 & 0 & 0 & k \end{bmatrix}, \quad (D-B)^{-1} = \frac{1}{k^2} \begin{bmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ -1 & k & 0 & 0 \\ -1 & 0 & k & 0 \\ -1 & 0 & 0 & k \end{bmatrix},$$

$$G = (D-B)^{-1}C = \frac{1}{k^2} \begin{bmatrix} 0 & -k & -k & -k \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) La matrice G ha una sola colonna linearmente indipendente, quindi ha rango 1 e un solo autovalore diverso da zero, che è uguale alla traccia. Perciò $\lambda_1 = (n-1)/k^2$ e $\lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$.

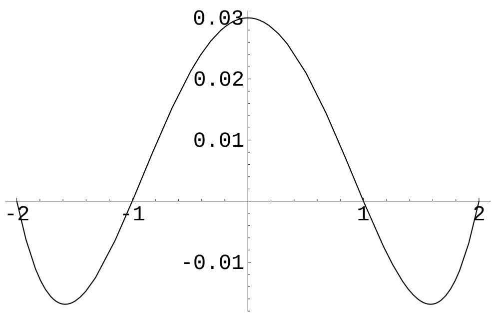
(c) Il metodo di Gauss-Seidel risulta convergente per $|k| > \sqrt{n-1}$.

Esercizio 4

Risulta

$$p(x) = \frac{\epsilon}{4}\,(x^2-1)(x^2-4).$$

Il grafico di $p(x)$ (nell'esempio $\epsilon = 0.03$)



mostra che vi sono tre punti stazionari m_1, $m_2 = 0$ e $m_3 = -m_1$. Risulta $m_1 = \sqrt{5/2}$. Poiché $p(0) = \epsilon$ e $|p(m_1)| = |p(m_3)| = 9\epsilon/16$, risulta $M = \epsilon$.