Soluzione della prova scritta di Algebra lineare del 16 giugno 2011

Esercizio 1

(a) La matrice A ha come colonne le immagini dei vettori della base canonica:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

(b) Con il metodo di Gauss si trasforma A in forma triangolare. Da $A^{(1)} = A$ si ottiene

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Quindi $\operatorname{rk}(A) = \dim(N(A)) = 2$. L'immagine di f è generata dalle prime due colonne di A, che possono essere scelte come base. Per descrivere i vettori $\mathbf{x}$ del nucleo di f si risolve con la sostituzione all'indietro il sistema $A^{(3)}\mathbf{x} = \mathbf{0}$, ottenendo

$$\mathbf{x} = \alpha \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbf{R},$$

quindi come base del nucleo possono essere scelti i vettori $\mathbf{v}_1 = [-3\ 1\ 0\ 1]^T$, $\mathbf{v}_2 = [-2\ 1\ 1\ 1]^T$.

(c) Poiché $N(A)^\perp = S(A^T)$, come base $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$ di $N(A)^\perp$ si possono prendere i vettori ottenuti trasponendo due righe linearmente indipendenti di A, ad esempio le prime due: $\mathbf{w}_1 = [1\ 1\ 1\ 2]^T$, $\mathbf{w}_2 = [0\ -1\ 1\ 1]^T$.

Dal momento che $\mathbf{R}^4 = N(A) \oplus N(A)^\perp$, la base richiesta può essere scelta come $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$.

(d) La matrice P del cambiamento di base ha come colonne i vettori dei coefficienti con cui i vettori della nuova base si esprimono come combinazione lineare dei vettori della base canonica, quindi

$$P = [\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{w}_1\ \mathbf{w}_2] = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

(e) Vale la relazione $B = P^{-1}AP$. Si osservi che le prime due colonne di AP sono nulle, perché si ottengono moltiplicando A per i vettori del nucleo $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$. Allora anche le prime due colonne di B sono nulle, perché si ottengono moltiplicando P^{-1} per le prime due colonne di AP che sono nulle. Si conclude che B ha necessariamente 8 elementi nulli, ovvero tutti gli elementi della prima e della secona colonna.

Esercizio 2

La matrice assegnata è la seguente

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

e il suo polinomio caratteristico è

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}.$$

Con lo sviluppo di Laplace secondo la prima riga (o, in alternativa, con il metodo di Gauss) si ottiene

$$\begin{aligned} p(\lambda) = (1-\lambda) \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 0 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} \\ = (1-\lambda)[(1-\lambda)^3 - (1-\lambda)] - [(1-\lambda)^2 - 1] \\ = (1-\lambda)^2[(1-\lambda)^2 - 1] - [(1-\lambda)^2 - 1] = [(1-\lambda)^2 - 1]^2, \end{aligned}$$

quindi gli autovalori sono $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 2$, entrambi con molteplicità algebrica 2. Le loro molteplicità geometriche sono uguali a quelle algebriche perché A è simmetrica.
Per calcolare gli autovettori si considerano i due sistemi lineari omogenei

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad (A - 2I)\mathbf{y} = \mathbf{0},$$

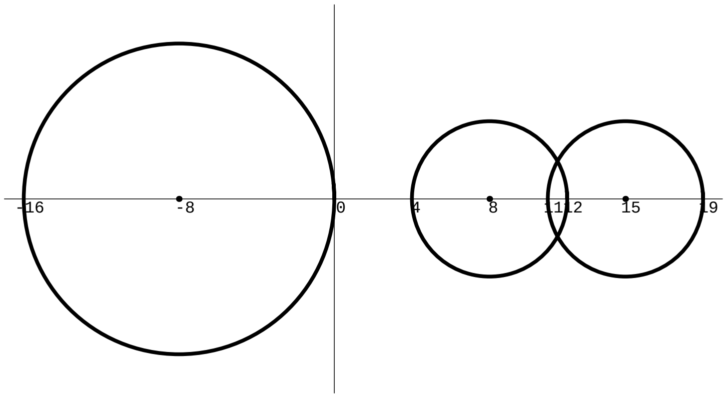
le cui soluzioni sono della forma

$$\mathbf{x} = \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \gamma \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \delta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

per α, β, γ e δ reali.

Esercizio 3

(a) Considerando i cerchi di Gerschgorin (per righe o per colonne si ottengono gli stessi cerchi perché A è simmetrica)



si ha che gli autovalori λ_i di A appartengono alla loro unione. Inoltre, dovendo essere reali per la simmetria di A, valgono le disuguaglianze $-16 \leq \lambda_1 \leq 0$, e $4 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq 19$.

(b) Poiché

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/k \end{bmatrix},$$

la matrice B risulta

$$B = \begin{bmatrix} -8 & 4 & 4k \\ 4 & 8 & 0 \\ 4/k & 0 & 15 \end{bmatrix}.$$

B ha gli stessi autovalori A perché è una sua trasformata per similitudine.

Affinché i cerchi per righe di B siano a due due disgiunti, l'estremo destro del diametro reale del cerchio ottenuto dalla prima riga deve essere minore dell'estremo sinistro del diametro reale del cerchio ottenuto dalla seconda, ovvero

$$-8 + 4 + 4|k| < 8 - 4 = 4,$$

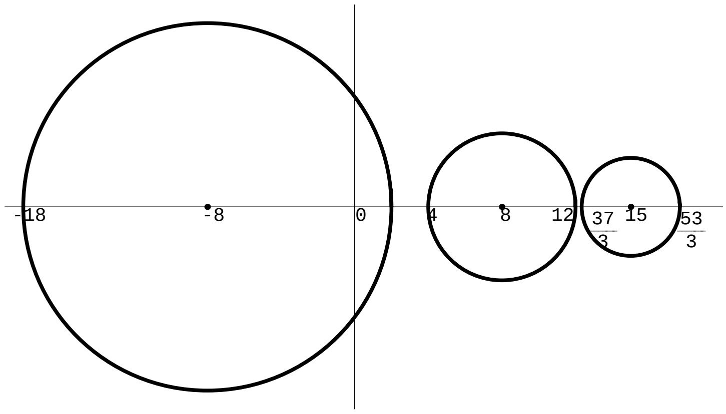
da cui si ha $|k| < 2$, e l'estremo destro del diametro reale del cerchio ottenuto dalla seconda riga deve essere minore dell'estremo sinistro del diametro reale del cerchio ottenuto dalla terza, ovvero

$$8 + 4 = 12 < 15 - 4/|k|,$$

da cui si ha $4/3 < |k|$.

Dunque tutti i valori di k tali che sia $4/3 < |k| < 2$ soddisfano la richiesta.

Ad esempio, per $k = 3/2$ i cerchi per riga di B sono i seguenti



e se ne ricavano le localizzazioni per λ_2 e λ_3:

$$4 \le \lambda_2 \le 12, \quad 37/3 \le \lambda_3 \le 53/3,$$

più fini di quelle ottenute al punto (a).

Se per $k = 3/2$ si considerano anche i cerchi per colonna di B e l'intersezione della loro unione con l'unione di quelli per riga si riesce a restringere anche l'intervallo di appartenenza per λ_1: $-44/3 \le \lambda_1 \le -4/3$.

Esercizio 4

(a) I coefficienti di $p(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2$ sono la soluzione del sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

che, dopo aver scambiato la seconda equazione con la terza, si riconduce con il metodo di Gauss al sistema con matrice triangolare

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 3/2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

che, risolto all'indietro, dà $a_2 = 1$, $a_1 = 3/4$, $a_0 = 1/4$. Quindi

$$p(x) = \frac{1}{4}\,x^2 + \frac{3}{4}x + 1.$$

(b) I coefficienti di $q(x) = b_0 x + b_1$ sono la soluzione del sistema lineare

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 7/2 \end{bmatrix},$$

dal quale si ha immediatamente $b_1 = 7/6$, $b_0 = 3/4$. Quindi

$$q(x) = \frac{3}{4}\,x + \frac{7}{6}.$$

(c) Poiché la funzione $f(x)$ è derivabile tre volte con continuità nell'intervallo $[-1,\ 1]$, vale la relazione

$$r(x) = f(x) - p(x) = (x+1)x(x-1)\frac{f'''(\xi)}{3!}, \quad \text{per } -1 \le x \le 1.$$

Tenendo conto che $f'''(x) = (\log 2)^3 2^x$, e che si ha $M_1 = \max_{x\in[-1,1]} |f'''(x)| = 2(\log 2)^3$ e $M_2 = \max_{x\in[-1,1]} |(x+1)x(x-1)| = \frac{2}{3\sqrt{3}}$, si può concludere:

$$|r(x)| \le \frac{M_2 M_1}{6} = \frac{2(\log 2)^3}{9\sqrt{3}} < \frac{\sqrt{3}}{32} < \frac{1}{16} = M,$$

avendo maggiorato $\log 2$ con $3/4$ e $\sqrt{3}$ con 2.

(d) (*facoltativo*) È sufficiente verificare che $M \le |f(c) - q(c)|$ per un punto c dell'inervallo $[1,\ 1]$. Infatti, per $c = 1$ si ha

$$M = \frac{1}{16} < |f(1) - q(1)| = \frac{1}{12}.$$