Soluzione della prova scritta di Algebra lineare del 14 giugno 2012

Esercizio 1

(a) La matrice A ha come colonne le immagini dei vettori della base canonica:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & k & 2 \\ 1 & 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

(b) Con il metodo di Gauss si trasforma A in forma triangolare. Da $A^{(1)} = A$ si ottiene

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 2+k & 4 \\ 0 & 3 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad A^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 2+k & 4 \\ 0 & 0 & \frac{3(2+k)}{4} & 0 \end{bmatrix}.$$

Quindi il rango di A è minimo, e vale due, per $k = -2$. Per $k \neq 2$ il rando di A è tre.

(c) Sia $k = -2$. In tal caso si ha

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad A^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

L'immagine $S(A)$ è generata dalle prime due colonne di A, che possono essere scelte come base. Per descrivere i vettori $\mathbf{x}$ del nucleo di A si risolve con la sostituzione all'indietro il sistema $A^{(3)}\mathbf{x} = \mathbf{0}$, ottenendo

$$\mathbf{x} = \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbf{R},$$

quindi come base del nucleo possono essere scelti i vettori $\mathbf{v}_1 = [\, -1\ 0\ 1\ 0 \,]^T$, $\mathbf{v}_2 = [\, -1\ 1\ 0\ 1 \,]^T$.

(d) La base scelta per $S(A)$ è formata dai vettori:

$$\mathbf{x}_1 = [\, 1\ \ -2\ 1 \,]^T, \quad \mathbf{x}_2 = [\, 0\ \ -4\ 3 \,]^T.$$

Se a questi vettori si applica il procedimento di Gram-Schmidt si ottiene la base ortonormale formata dai vettori

$$\mathbf{y}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}[\, 1\ \ -2\ 1 \,]^T, \qquad \mathbf{y}_2 = \frac{1}{\sqrt{174}}[\, -11\ \ -2\ 7 \,]^T.$$

Esercizio 2

(a) Per studiare la diagonalizzabilità di A se ne devono determinare gli autovalori e le proprietà geometriche degli autovettori. Il polinomio caratteristico si può calcolare con lo sviluppo di Laplace secondo la prima riga (o, in alternativa, trattandosi di una matrice di ordine 3, con la regola di Sarrus) del determinante di $A - \lambda I$. Si ottiene

$$p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 4-\lambda & 1 & -1 \\ -2 & 1-\lambda & 1 \\ 2 & 1 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

$$= (4-\lambda)[(1-\lambda)^2 - 1] - [-2(1-\lambda) - 2] - [-2 - 2(1-\lambda)]$$
$$= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8 = (-\lambda + 2)^3,$$

quindi l'unico autovalore è $\lambda = 2$, con molteplicità algebrica 3. La molteplicità geometrica è la dimensione del nucleo della matrice

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

il cui rango è evidentemente 1, perché la seconda e la terza colonna sono proporzionali alla prima, non nulla. Si conclude che

$$\dim N(A - 2I) = 3 - \operatorname{rk}(A - 2I) = 2,$$

e quindi la molteplicità geometrica e' minore di quella algebrica: A non è diagonalizzabile.

(b) (*facoltativo*) T deve avere necessariamente gli stessi autovalori di A, pertanto deve essere $t_{11} = t_{22} = t_{33} = 2$. Inoltre deve esistere una matrice S, invertibile, tale che $AS = ST$. Ponendo $S = [\ \mathbf{s_1}\ \mathbf{s_2}\ \mathbf{s_3}\ ]$, dove $\mathbf{s_i}$ è la i-esima colonna di S, si ottengono le relazioni

$$A = 2\mathbf{s_1}, \quad A\mathbf{s_2} = 2\mathbf{s_2}, \quad A\mathbf{s_3} = 2\mathbf{s_3} + \mathbf{s_2},$$

pertanto $\mathbf{s_1}$ e $\mathbf{s_2}$ devono essere due autovettori di A linearmente indipendenti, e $\mathbf{s_3}$ deve risolvere il sistema lineare $(A - 2I)\mathbf{s_3} = \mathbf{s_2}$.

Gli autovettori di A sono le soluzioni non nulle del sistema

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0},$$

e hanno la forma $\mathbf{x} = \alpha[\ 1/2\ 0\ 1\ ]^T + \beta[\ -1/2\ 1\ 0\ ]^T$, per α e β reali. Quindi $\mathbf{s_2}$ deve avere questa forma, e $\mathbf{s_3}$ deve risolvere il sistema

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{s}_3 = \begin{bmatrix} \alpha/2 - \beta/2 \\ \beta \\ \alpha \end{bmatrix},$$

la cui matrice aumentata triangolarizzata con il metodo di Gauss è

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & \alpha/2 - \beta/2 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha/2 + \beta/2 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha/2 + \beta/2 \end{array}\right].$$

Imponendo $\alpha = -\beta \neq 0$, questo sistema ha infinite soluzioni non nulle $\mathbf{s_3}$, che non possono essere autovettori, e che quindi sono linearmente indipendenti da $\mathbf{s_1}$ e $\mathbf{s_2}$. $\mathbf{s_1}$ deve essere scelto linearmente indipendente da $\mathbf{s_2}$. Si conclude che esistono infinite matrici S che rendono simile T ad A. Una scelta particolare: $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $\mathbf{s_2} = [\ 1\ \ -1\ 1\ ]^T$, $\mathbf{s_3} = [\ 1/2\ 0\ 0\ ]^T$, $\mathbf{s_1} = [\ 1/2\ 0\ 1\ ]^T$,

$$S = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 3

(a) Si verifica che $\mathcal{S}$ è chiuso rispetto alle operazioni di somma e prodotto per scalare. Infatti se B_1 e B_2 commutano con A, si ha $(B_1 + B_2)A = B_1A + B_2A = AB_1 + AB_2 = A(B_1 + B_2)$, ovvero anche $B_1 + B_2$ commuta con A. Poi, se B commuta con A, $\alpha BA = A\alpha B$, cioè anche αB commuta con A.

(b) Si esprima A come $A = I + 2Z$, dove

$$Z = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si osservi poi che B commuta con A se e solo se $BZ = ZB$, cioè

$$\begin{bmatrix} 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{21} & b_{22} \\ 0 & b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

che è un sistema lineare di 9 equazioni in 9 incognite (b_{13} non compare). Si ha immediatamente $b_{21} = b_{31} = b_{32} = 0$, e il sistema si riduce alle tre equazioni

$$\begin{cases} b_{11} - b_{22} = 0 \\ b_{22} - b_{33} = 0 \\ b_{12} - b_{23} = 0 \end{cases}$$

nelle sei incognite b_{11}, b_{22}, b_{33}, b_{12}, b_{23}, b_{13}. Il rango della matrice del sistema è tre, quindi lo spazio delle soluzioni ha dimensione tre, cioè il numero delle colonne diminuito del rango della matrice. Ponendo $b_{33} = \alpha$, $b_{23} = \beta$, $b_{13} = \gamma$, le soluzioni hanno la forma

$$[b_{11}, b_{22}, b_{33}, b_{12}, b_{23}, b_{13}] = [\alpha, \alpha, \alpha, \beta, \beta, \gamma].$$

$\mathcal{S}$ ha dimensione tre, e una base è costituita dalle tre matrici

$$I, \quad Z, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Esercizio 4

(a) I coefficienti di $p(x) = a_0 x + a_1$ sono la soluzione del sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \end{bmatrix},$$

che ha soluzione $a_0 = -1/6$, $a_1 = 7/6$. Quindi

$$p(x) = -\frac{1}{6}\, x + \frac{7}{6} \quad .$$

(b) Sia $r(x) = f(x) - p(x)$. Dal momento che $r(1) = r(4) = 0$, il massimo di $|r(x)|$ è assunto in un punto stazionario di $r(x)$. Nell'intervallo $r'(x) = -1/2\, x^{-3/2} + 1/6$ si annulla nel solo punto $x_m = \sqrt[3]{9}$. Quindi

$$\max_{1 \le x \le 4} |r(x)| = |r(x_m)| = \left| \frac{1}{\sqrt[6]{9}} + \frac{\sqrt[3]{9}}{6} - \frac{7}{6} \right| = 0.126...$$

Dal teorema del resto, che è applicabile perché nell'intervallo $f(x)$ è derivabile due volte con continuità, si ha

$$\max_{1 \le x \le 4} |r(x)| \le \max_{1 \le x \le 4} |(x-1)(x-4)| \max_{1 \le \xi \le 4} \frac{|f''(\xi)|}{2}$$
$$= \frac{9}{8}\frac{3}{4} = \frac{27}{32} = 0.843...,$$

poiché $f''(x) = 3/4\, x^{-5/2}$. La limitazione ottenuta dal teorema del resto è ovviamente maggiore del massimo calcolato.