Soluzione della prova scritta di Algebra lineare del 6 luglio 2011

Esercizio 1

(a) Applicando lo sviluppo di Laplace alla prima riga di A si ottiene:

$$\det A = -\det \begin{bmatrix} k & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + k \det \begin{bmatrix} k & 1 \\ 0 & k \end{bmatrix} = k^3 + 1.$$

Ne segue che A non è invertibile per $k = -1$.

(b) Per $k \neq -1$ si deve verificare che esistono α e β tali che valga la relazione $A_k^{-1} = \alpha A_k^2 + \beta I$. Calcolando l'aggiunta

$$\mathrm{adj}(A_k) = \begin{bmatrix} -k & 1 & k^2 \\ k^2 & -k & 1 \\ 1 & k^2 & -k \end{bmatrix},$$

l'inversa risulta

$$A_k^{-1} = \frac{1}{k^3+1} \begin{bmatrix} -k & 1 & k^2 \\ k^2 & -k & 1 \\ 1 & k^2 & -k \end{bmatrix}.$$

La relazione da verificare si può scrivere così :

$$\frac{1}{k^3+1} \begin{bmatrix} -k & 1 & k^2 \\ k^2 & -k & 1 \\ 1 & k^2 & -k \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 2k & 1 & k^2 \\ k^2 & 2k & 1 \\ 1 & k^2 & 2k \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

da cui si ottengono i valori $\alpha = \frac{1}{k^3+1}$ e $\beta = -\frac{3k}{k^3+1}$.

NOTA. Nel testo consegnato in aula la relazione da verificare era erroneamente riportata come $A_k^{-1} = \alpha A_k + \beta I$, che è verificata solamente per $k = 1$, $\alpha = \beta = 1/2$. Pertanto questo parte del punto (b) dell'esercizio 1 non è stata inclusa nella valutazione.

(c) La relazione da verificare, per $k = -1$, è la seguente:

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -3 & 0 & 3 \\ 3 & -3 & 0 \end{bmatrix} = \gamma \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

per cui $\gamma = -3$.

Esercizio 2

(a) $A^T = (\mathbf{u}\mathbf{v}^T + \mathbf{v}\mathbf{u}^T)^T = (\mathbf{u}\mathbf{v}^T)^T + (\mathbf{v}\mathbf{u}^T)^T = \mathbf{v}\mathbf{u}^T + \mathbf{u}\mathbf{v}^T = A$, quindi A è simmetrica.

(b) $\mathbf{x} \in N(A)$ se e solo se $(\mathbf{u}\mathbf{v}^T + \mathbf{v}\mathbf{u}^T)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Ponendo $\alpha = \mathbf{v}^T\mathbf{x}$ e $\beta = \mathbf{u}^T\mathbf{x}$, si ottiene $\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} = \mathbf{0}$, che implica $\alpha = \beta = 0$ per l'indipendenza lineare di $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$. Quindi $N(A) = U^\perp \cap V^\perp$.

(c) Dal punto (b) si ha che i vettori $\mathbf{x}$ del nucleo sono tutte le soluzioni del sistema lineare omogeneo di 2 equazioni in n incognite

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}^T \\ \mathbf{v}^T \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0},$$

la cui matrice dei coefficienti ha rango 2, da cui segue $\dim N(A) = n - 2$, e $\operatorname{rank}(A) = 2$.

(d) Per i valori assegnati a $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ si ha

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & -3 & 0 \\ 3 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix},$$

che, con il metodo di Gauss si riconduce alla forma triangolare superiore

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Quindi il nucleo ha dimensione 2, ed è formato da vettori della forma

$$\mathbf{x} = \alpha[-3\ 0\ 2\ 1]^T + \beta[1\ 1\ 0\ 0]^T.$$

Esercizio 3

(a) Gli autovalori della matrice

$$B = A + I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ -1 & -3 & 2 & 9 \end{bmatrix},$$

sono gli zeri del polinomio

$$\det(B - \lambda I) = \lambda^2(\lambda^2 - 12\lambda + 29),$$

ovvero $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 6 - \sqrt{7}$, $\lambda_4 = 6 + \sqrt{7}$.

(b) Poiché $A = B - I$, gli autovalori μ_i di A hanno la forma $\mu_i = \lambda_i - 1$. Affinché A sia diagonalizzabile la molteplicità geometrica $\tau(\mu_1)$ deve essere uguale alla molteplicità algebrica $\sigma(\mu_1) = 2$, cioè $\dim N(A+I) = \dim N(B) = 2$, e infatti B, come mostra la forma triangolare superiore a cui viene ricondotta con il metodo di Gauss

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

ha rango 2, e quindi per l'autovalore μ_1 si trovano due autovettori linearmente indipendenti, ad esempio $\mathbf{x}_1 = [2\ 0\ 1\ 0]^T$ e $\mathbf{x}_2 = [-3\ 1\ 0\ 0]^T$. La matrice S ha la forma $S = [\mathbf{x}_1\ \mathbf{x}_2\ \mathbf{x}_3\ \mathbf{x}_4]$, dove $\mathbf{x}_3$ e $\mathbf{x}_4$ sono autovettori relativi a μ_3 e μ_4 rispettivamente.

Esercizio 4

(a) I coefficienti di $p(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2$ sono la soluzione del sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

che si riconduce con il metodo di Gauss al sistema con matrice triangolare

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix},$$

che, risolto all'indietro, dà $a_2 = -4/3$, $a_1 = 3/2$, $a_0 = -1/6$. Quindi

$$p(x) = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{4}{3}.$$

(b) Per il resto $r(x) = f(x) - p(x)$ vale la relazione

$$r(x) = (x-1)(x-2)(x-4)\frac{1}{3(\log_e 2)\xi^3},$$

per $x > 0$ e un opportuno valore $\xi > 0$. È evidente che $r(x)$ si annulla soltanto se x coincide con uno dei nodi.

(c) (*facoltativo*) Dall'espressione del resto riportata al punto (b) la limitazione richiesta è

$$M = \frac{1}{3(\log_e 2)} \max_{1 \le x \le 4} |(x-1)(x-2)(x-4)| \max_{1 \le x \le 4} \frac{1}{x^3}$$

$$= \frac{1}{3(\log_e 2)} \frac{2(10+7\sqrt{7})}{27},$$

poiché

$$\max_{1\le x\le 4} |(x-1)(x-2)(x-4)| = \frac{2(10+7\sqrt{7})}{27}, \quad \max_{1\le x\le 4} \frac{1}{x^3} = 1.$$