Soluzione della prova scritta
di Algebra lineare del 10 luglio 2012

Esercizio 1

(a) Il metodo di Gauss applicato al sistema $A\mathbf{y} = \mathbf{b}$ produce le matrici aumentate:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & 0 & -3 \\ 7 & -5 & 3 & 3 \end{array}\right], \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -9 \\ 0 & 2 & -4 & -18 \end{array}\right], \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Si ha $\text{rank}(A) = 2$, ma il teorema di Rouché-Capelli è verificato, quindi esistono infinite soluzioni, esprimibili nella forma

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} -6 \\ -9 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbf{R}.$$

Per ogni $\mathbf{y}$, il metodo di Gauss applicato al sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ produce le matrici aumentate:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & -6+\alpha \\ 2 & -1 & 0 & -9+2\alpha \\ 7 & -5 & 3 & \alpha \end{array}\right], \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & -6+\alpha \\ 0 & 1 & -2 & -21+4\alpha \\ 0 & 2 & -4 & -42+8\alpha \end{array}\right],$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & -6+\alpha \\ 0 & 1 & -2 & -21+4\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Quindi per ogni $\mathbf{y}$, ovvero per ogni α, si hanno infinite soluzioni $\mathbf{x}$ della forma

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -15 \\ -21 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \beta \in \mathbf{R}.$$

(b) Per qualunque matrice A vale l'inclusione $N(A) \subset N(A^2)$: infatti se $\mathbf{z} \in N(A)$ allora $A\mathbf{z} = \mathbf{0}$ e quindi $A^2\mathbf{z} = A\mathbf{0} = \mathbf{0}$, che significa $\mathbf{z} \in N(A^2)$. Pertanto devono esistere basi di $N(A)$ e di $N(A^2)$ l'una inclusa nell'altra.

Per la matrice A assegnata, dalle espressioni trovate al punto (a) per $\mathbf{y}$ e $\mathbf{x}$ si ha che una base di $N(A)$ è formata dal vettore $[1\ 2\ 1]$, e che una base di $N(A^2)$ è formata dai vettori $[1\ 2\ 1]^T$ e $[3\ 4\ 0]^T$.

Esercizio 2

(a) Posto $\mathbf{x} = [x_1\ x_2\ x_3]$ e $\mathbf{v} = [v_1\ v_2\ v_3]$, le relazioni assegnate si traducono nelle seguenti equazioni lineari in x_1, x_2, x_3:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{3} x_i v_i = 1, \\ x_i v_j - v_i x_j = 0, \quad i = 1,2,3,\ j = 1,2,3 \end{cases},$$

che formano il sistema lineare

$$\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ v_2 & -v_1 & 0 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_3 & -v_2 \\ -v_3 & 0 & v_1 \\ 0 & -v_3 & v_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

che, dopo aver eliminato le equazioni in posizione 2, 5, 6, 8, 9 e 10 che sono linearmente dipendenti dalle altre, si riduce alle quattro equazioni seguenti:

$$\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ v_2 & -v_1 & 0 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ 0 & v_3 & -v_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Poiché $\mathbf{v}$ non è nullo, si può supporre $v_1 \neq 0$, altrimenti ci si riconduce a questo caso permutando $\mathbf{v}$. Con il metodo di Gauss si ottengono le matrici aumentate

$$\left[\begin{array}{ccc|c} v_1 & v_2 & v_3 & 1 \\ v_2 & -v_1 & 0 & 0 \\ v_3 & 0 & -v_1 & 0 \\ 0 & v_3 & -v_2 & 0 \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{ccc|c} v_1 & v_2 & v_3 & 1 \\ 0 & -\frac{v_1^2+v_2^2}{v_1} & -\frac{v_2 v_3}{v_1} & -\frac{v_2}{v_1} \\ 0 & -\frac{v_2 v_3}{v_1} & -\frac{v_1^2+v_3^2}{v_1} & -\frac{v_3}{v_1} \\ 0 & v_3 & -v_2 & 0 \end{array}\right],$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} v_1 & v_2 & v_3 & 1 \\ 0 & -\frac{v_1^2+v_2^2}{v_1} & -\frac{v_2 v_3}{v_1} & -\frac{v_2}{v_1} \\ 0 & 0 & -\frac{v_1(v_1^2+v_2^2+v_3^2)}{v_1^2+v_2^2} & -\frac{v_3 v_1}{v_1^2+v_2^2} \\ 0 & 0 & -\frac{v_1(v_1^2+v_2^2+v_3^2)}{v_1^2+v_2^2} & -\frac{v_3 v_1}{v_1^2+v_2^2} \end{array}\right],$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} v_1 & v_2 & v_3 & 1 \\ 0 & -\frac{v_1^2+v_2^2}{v_1} & -\frac{v_2 v_3}{v_1} & -\frac{v_2}{v_1} \\ 0 & 0 & -\frac{v_1(v_1^2+v_2^2+v_3^2)}{v_1^2+v_2^2} & -\frac{v_3 v_1}{v_1^2+v_2^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

o più semplicemente, moltiplicando la seconda riga per $-v_1$ e la terza per $-(v_1^2+v_2^2)/v_1$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} v_1 & v_2 & v_3 & 1 \\ 0 & v_1^2+v_2^2 & v_2v_3 & v_2 \\ 0 & 0 & v_1^2+v_2^2+v_3^2 & v_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Il sistema ha una sola soluzione.

(c) Per $\mathbf{v} = [1\ 1\ 1]^T$ la matrice ottenuta con il metodo di Gauss al punto (b) diventa

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

quindi la soluzione è $\mathbf{x} = 1/3 \cdot [1\ 1\ 1]$.

(d) (*facoltativo*) Dalla seconda delle due relazioni proposte al punto (a), moltiplicandone entrambi i membri a destra per $\mathbf{v}$, si ottiene $\mathbf{x}\mathbf{v}^T\mathbf{v} - \mathbf{v}\mathbf{x}^T\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Tenendo conto della prima relazione, se ne ricava che deve essere

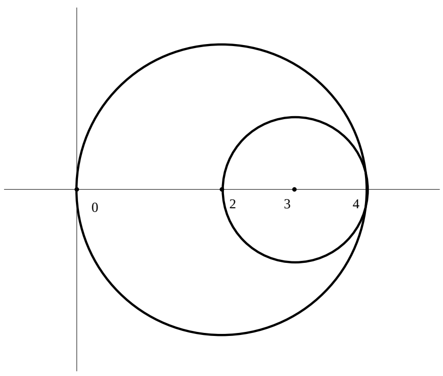
$$\mathbf{x}\mathbf{v}^T\mathbf{v} = \mathbf{v}.$$

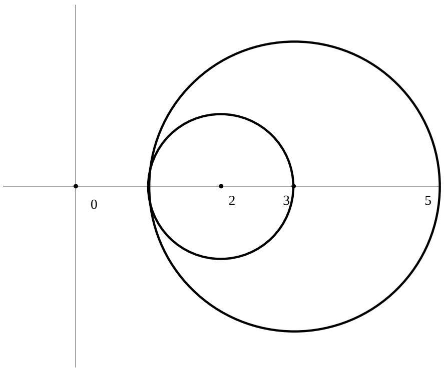
Ma poiché $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{v}^T\mathbf{v} \neq 0$, e quindi l'unico vettore che può soddisfare le condizioni date è

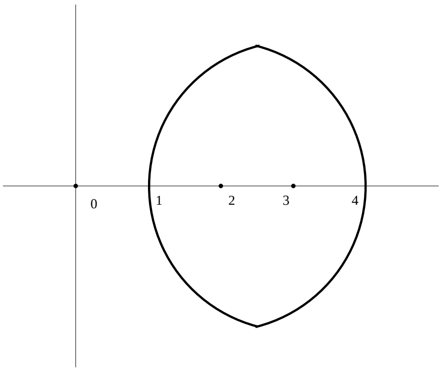
$$\mathbf{x} = \frac{1}{\mathbf{v}^T\mathbf{v}}\mathbf{v}.$$

Esercizio 3

(a) Si riportano di seguito i cerchi di Gerschgorin per righe, per colonne, e l'intersezione delle loro unioni.







Gli autovalori possono essere non reali. Per i loro moduli si ha la limitazione $1 \le |\lambda_i| \le 4$.

(b) B_k è una trasformata di A per similitudine, e quindi ha gli stessi autovalori di A.

(c) Si ha
$$S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ e } B_k = \begin{bmatrix} 2-k & -k^2-k+2 \\ 1 & k+3 \end{bmatrix}.$$

Per $k > 1$ è $(B_k)_{11} < (B_k)_{22}$, e $|-k^2-k+2| = k^2+k-2$. Affinché i cerchi per riga siano disgiunti deve essere

$$2-k+k^2+k-2 < k+3-1,$$

ovvero $-1 < k < 2$. Affinché i cerchi per colonna siano disgiunti deve essere
$$2-k+1 < k+3-k^2-k+2,$$

ovvero $-1 < k < 2$. Si conclude che per $1 < k < 2$ sono disgiunti sia i cerchi per riga che quelli per colonna. Gli autovalori di B_k e quindi quelli di A sono dunque reali.

Esercizio 4

(a) I coefficienti di $p(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2$ sono la soluzione del sistema $V^TV\mathbf{a} = V^T\mathbf{f}$, dove

$$V = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 1/5 \\ 1/2 \\ 1 \\ 1/2 \\ 1/5 \end{bmatrix},$$

la cui matrice aumentata è

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 34 & 0 & 10 & 13/5 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 5 & 12/5 \end{array}\right],$$

che viene ricondotta con i metodo di Gauss alla forma triangolare

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 34 & 0 & 10 & 13/5 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 35/17 & 139/85 \end{array}\right].$$

La soluzione è $a_0 = -11/70$, $a_1 = 0$, $a_2 = 139/175$. Quindi

$$p(x) = -\frac{11}{70}x^2 + \frac{139}{175} \quad .$$

(b) Si riportano i grafici, nello stesso piano cartesiano, di $f(x)$ e $p(x)$.