Soluzione della prova scritta
di Algebra lineare del 12 settembre 2011

Esercizio 1

(a) Per determinare una base di V basta triangolarizzare con il metodo di Gauss la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \end{bmatrix},$$

le cui colonne sono i vettori assegnati. Si ha $A^{(1)} = A$,

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 1/2 & -7/2 & -5/2 \\ 0 & 5/2 & -5/2 & -7/2 \end{bmatrix}, \quad A^{(3)} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 1/2 & -7/2 & -5/2 \\ 0 & 0 & 15 & 9 \end{bmatrix},$$

da cui si ottiene $\mathrm{rk}(A^{(3)}) = \mathrm{rk}(A) = \dim V = 3$, e come base si può scegliere $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.

(b) $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ appartengono alla base scelta in (a). Per esprimere $\mathbf{v}_4$ in termini dei vettori della base basta risolvere il sistema lineare $B\mathbf{x} = \mathbf{v}_4$, dove B è la sottomatrice di A formata dalle prime tre colonne. Poiché $[B|\mathbf{v}_4] = A$, con il metodo di Gauss si riottiene $A^{(3)}$, e risolvendo con la sostituzione all'indietro si trova $\mathbf{x} = [1/5, -4/5, 3/5]^T$.

Esercizio 2

Si osserva che $V = N(A)$, dove A è la matrice di una riga e tre colonne $A = [1 \ \ -1 \ 2\,]$. Ovviamente $\mathrm{rk}(A) = 1$, quindi $\dim V = 3 - \mathrm{rk}(A) = 2$. Se si pone $x_3 = \alpha$, $x_2 = \beta$, i vettori $\mathbf{v}$ di V si possono esprimere come

$$\mathbf{v} = \alpha \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

e quindi i due vettori linearmente indipendenti $\mathbf{v}_1 = [-2 \ 0 \ 1\,]^T$ e $\mathbf{v}_2 = [\,1 \ 1 \ 0\,]^T$ formano una base. Applicando il metodo di Gram-Schmidt a $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ si ottiene:

$$\mathbf{t}_1 = \mathbf{v}_1, \quad \mathbf{y}_1 = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{t}_1^t \mathbf{t}_1}} \mathbf{t}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} [-2 \ 0 \ 1\,]^T,$$

$$\mathbf{t}_2 = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_2^T \mathbf{y}_1 = [\frac{1}{5} \ 1 \ \frac{2}{5}\,]^T, \quad \mathbf{y}_2 = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{t}_2^t \mathbf{t}_2}} \mathbf{t}_2 = \frac{1}{\sqrt{30}} [\,1 \ 5 \ 2\,]^T.$$

Il sottospazio $V^\perp$ ha dimensione $3 - \dim V = 1$, e dalla relazione $V^\perp = N(A)^\perp = S(A^T)$ risulta che per avere una base ortonormale di $V^\perp$ basta normalizzare l'unica colonna di A^T, ottenendo così il vettore $\frac{1}{\sqrt{6}}[\,1\ -1\ 2\,]^T$.

Esercizio 3

(a) La matrice A_k ha, per qualunque k, autovalori $\lambda_1 = 2$ con molteplicità algebrica uno, e $\lambda_2 = 1$ con molteplicità algebrica due. Quindi affinché A_k sia diagonalizzabile è necessario e sufficiente che la molteplicità geometrica di λ_2 sia due, ovvero che sia $\dim(N(A_k - I)) = 2$. Ma ciò è vero se e solo se $\mathrm{rk}(A_k - I) = 1$. Poiché con il metodo di Gauss la matrice $A_k - I$ si riconduce alla forma triangolare

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

la condizione è soddisfatta se e solo se $k = 1$.

(b) Il solo valore da considerare è $k = 1$, quindi si deve diagonalizzare la matrice

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

che ammette tre autovettori linearmente indipendenti, ad esempio

$$\mathbf{x}_1 = [\,1/2\ 1\ 5/2\,]^T, \quad \mathbf{x}_2 = [\,0\ 1\ 0\,]^T, \quad \mathbf{x}_3 = [\,0\ 0\ 1\,]^T.$$

Una matrice S che diagonalizza per similitudine A_1 è $S = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3]$.

(c) (*facoltativo*) Per quanto detto in (b) A_0 non è diagonalizzabile, e quindi, anche se studiando B si troverebbe che è diagonalizzabile, la risposta è no.

Esercizio 4

I coefficienti del polinomio di approssimazione ai minimi quadrati di grado massimo uno $p(x)$ sono la soluzione $\mathbf{a}$ del sistema $V^TV\mathbf{a} = V^T\mathbf{f}$, con

$$V = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ t & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ t^2 \end{bmatrix},$$

la cui matrice aumentata iniziale è

$$[V^TV | V^T\mathbf{f}] = \left[\begin{array}{cc|c} 1+t^2 & 1+t & 1+t^3 \\ 1+t & 3 & 1+t^2 \end{array}\right],$$

da cui, con il metodo di Gauss si ottiene

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1+t^2 & 1+t & 1+t^3 \\ 0 & \frac{2(t^2-t-t)}{t^2+1} & \frac{-t^3+2t^2-t}{t^2+1} \end{array}\right].$$

La seconda equazione del sistema triangolare dà

$$a_1 = \frac{-t^3+2t^2-t}{2(t^2-t+1)},$$

quindi, se $a_1 = -1/3$, t deve soddisfare l'equazione algebrica $3t^3 - 8t^2 + 5t - 2 = 0$, che può avere come soluzioni intere solamente i valori $\pm 1, \pm 2$. Per sostituzione si trova $t = 2$ come unica soluzione intera. Il polinomio è $p(x) = 2x - 1/3$.