Soluzione della prova scritta
di Algebra lineare dell'11 settembre 2012

Esercizio 1

(a) La matrice richiesta ha come colonne i vettori $f(\mathbf{e}_1)$ e $f(\mathbf{e}_2)$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

(b) Si ha $B = P^{-1}AP$, dove P è la matrice del cambiamento di base:

$$P = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

(c) B ammette autovalore 2, con molteplicità algebrica 2. Gli autovettori sono le soluzioni non nulle $\mathbf{x} = [\ x_1\ x_2\ ]^T$ del sistema lineare

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

che sono tutti i vettori della forma $\mathbf{x} = k[\ 0\ 1\ ]^T$, con $k \in \mathbf{R}$, $k \neq 0$.

Esercizio 2

(a) A è diagonalizzabile perché è simmetrica, quindi esiste S invertibile tale che $D = S^{-1}AS$ è diagonale: D ha elementi sulla diagonale uguali ai tre autovalori di A e S ha come colonne i correspondenti autovettori. Il polinomio caratteristico di A è $p(\lambda) = -\lambda(\lambda^2 - 4\lambda + 2)$, gli autovalori sono dunque

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 2 - \sqrt{2}, \lambda_3 = 2 + \sqrt{2},$$

e scegliendo come corrispondenti autovettori

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

si ottiene come matrice S

$$S = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

La sua inversa è

$$S^{-1} = 1/2 \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1/2 & -1/\sqrt{2} & 1/2 \\ 1/2 & 1/\sqrt{2} & 1/2 \end{bmatrix}.$$

La condizione richiesta può essere riscritta come $S^{-1}BSS^{-1}BS = D$, quindi se si trova una matrice E tale che $E^2 = D$, si potrà scegliere $B = SES^{-1}$. Una matrice E tale che $E^2 = D$ è

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2-\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2+\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Si ha infine

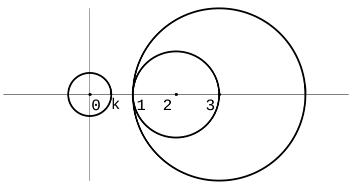
$$B = SES^{-1} = \left(\sqrt{2-\sqrt{2}} + \sqrt{2+\sqrt{2}}\right) \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2+\sqrt{2}} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2+\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2+\sqrt{2}} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2+\sqrt{2}} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

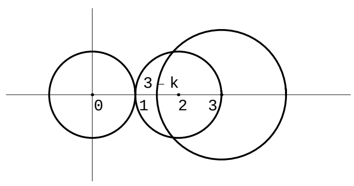
(b) (*facoltativo*) Se $B^2 = A$, si può soltanto dire che $N(B) \subset N(A)$: infatti se $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$, allora $A\mathbf{x} = BB\mathbf{x} = B\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

Tuttavia, nel caso delle matrici considerate nel punto precedente, B è stata costruita in modo tale da avere gli stessi autovettori di A: in particolare gli autovettori relativi all'autovalore 0 di B sono tutti e soli gli autovettori relativi all'autovalore 0 di A. Quindi $N(A) = N(B)$.

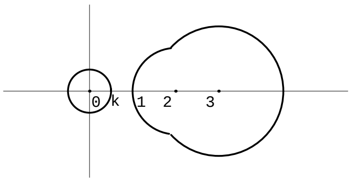
Esercizio 3

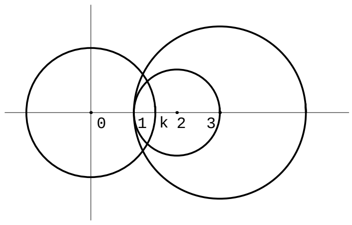
(a) Si riportano di seguito i cerchi di Gerschgorin per righe, per colonne, e l'intersezione delle loro unioni, distinguendo il caso $k < 1$ dal caso $k \geq 1$.

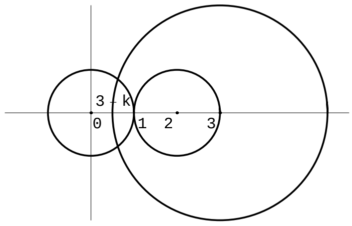




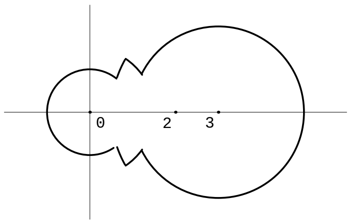
$k = 1/2$







$k = 3/2$



Non esistono valori di k per i quali il teorema di Gerschgorin permette di affermare che tutti gli autovalori sono reali: infatti, per ogni k il cerchio relativo alla terza riga è contenuto nel cerchio relativo alla seconda riga, mentre il cerchio relativo alla prima colonna interseca in 1 il cerchio relativo alla terza colonna. Inoltre si può osservare che per $k < 1$ esiste un autovalore reale compreso tra k e $-k$.

(b) Per $k = 1$ il polinomio caratteristico di A è $p(\lambda) = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 6\lambda + 2 = (\lambda - 1)(-\lambda^2 + 4\lambda - 2)$, gli autovalori sono dunque $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2 - \sqrt{2}$, $\lambda_3 = 2 + \sqrt{2}$.

Esercizio 4

(a) I coefficienti di $p(x) = a_0 x^2 + a_1 x + a_2$ sono la soluzione del sistema $V\mathbf{a} = \mathbf{f}$, dove

$$V = \begin{bmatrix} 1/4 & -1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/4 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}.$$

Con il metodo di Gauss si arriva alla forma triangolare della matrice aumentata seguente

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1/4 & -1/2 & 1 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{3}/2 \end{array}\right].$$

La soluzione è $a_0 = 2\sqrt{3} - 4$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$. Quindi

$$p(x) = (2\sqrt{3} - 4)\, x^2 + 1 \quad .$$

(b) I coefficienti di $q(x) = b_0 x + b_1$ sono la soluzione del sistema $V^T V \mathbf{b} = V^T \mathbf{f}$, dove

$$V = \begin{bmatrix} -1/2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix},$$

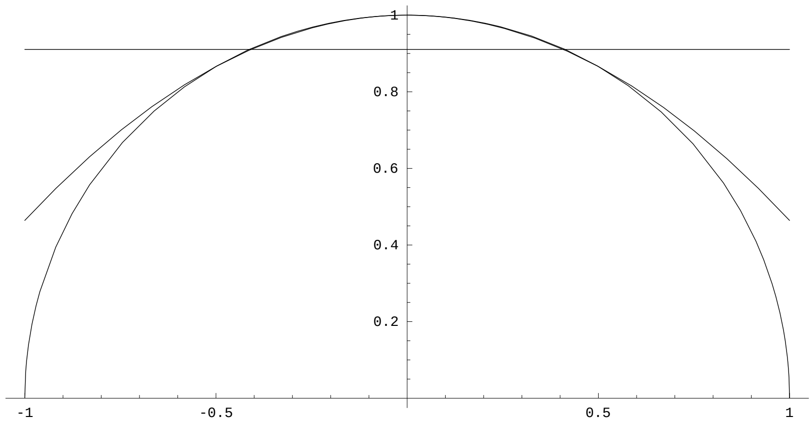
e $\mathbf{f}$ è definito come al punto precedente. Si ottiene il sistema lineare corrispondente alla matrice aumentata seguente

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & \sqrt{3}+1 \end{array}\right].$$

La soluzione è $b_0 = 0$, $b_1 = \frac{\sqrt{3}+1}{3}$. Quindi

$$q(x) = \frac{\sqrt{3}+1}{3} \quad .$$

Si riportano i grafici, nello stesso piano cartesiano, di $f(x)$, $p(x)$ e $q(x)$, per $|x| \leq 1$.



Si osservi che $f(x) \geq p(x)$ per $|x| \leq 1/2$.