Soluzione della prova scritta
di Algebra lineare del 12 gennaio 2012

Esercizio 1

(a) Per determinare una base di V basta triangolarizzare con il metodo di Gauss la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix},$$

le cui colonne sono i vettori assegnati. Si ha $A^{(1)} = A$,

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad A^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

da cui si ottiene $\mathrm{rk}(A^{(3)}) = \mathrm{rk}(A) = \dim V = 2$, e come base si può scegliere $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$.

(b) Se si indica con B la matrice $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\ ]$ e se si osserva che $V = S(B)$, si ha che $V^\perp = N(V^T)$. V^T si triangolarizza nella forma

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

il cui nucleo è formato dai vettori $[\ -\alpha/2 - 3\beta/2,\ -\alpha/2 + \beta/2,\ \alpha,\ \beta\ ]^T$, per α e β reali.

Una base di $V^\perp$ è quindi $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$, con $\mathbf{u}_1 = [\ -1/2,\ -1/2,\ 1,\ 0\ ]^T$ e $\mathbf{u}_2 = [\ -3/2,\ 1/2,\ 0,\ 1\ ]^T$. Applicando il metodo di Gram-Schmidt a $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ si ottiene finalmente la base ortonormale $\{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2\}$, dove $\mathbf{z}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}[\ -1,\ -1,\ 2,\ 0\ ]^T$ e $\mathbf{z}_2 = \frac{1}{\sqrt{30}}[\ -4,\ 2,\ -1,\ 3\ ]^T$.

Esercizio 2

(a) Con il metodo di Gauss si trasforma la matrice dei coefficienti in forma triangolare. La matrice aumentata finale è la seguente:

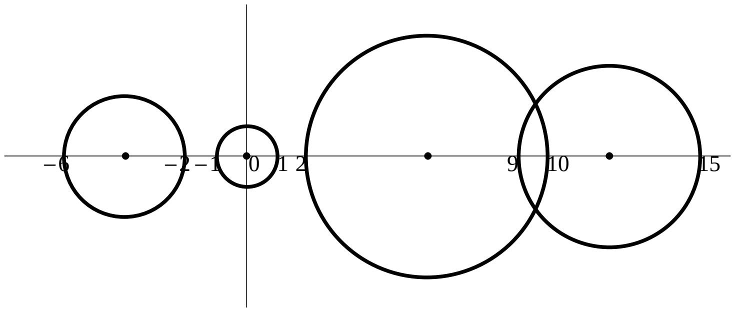
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & k & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2-k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2-k & 0 \end{array}\right].$$

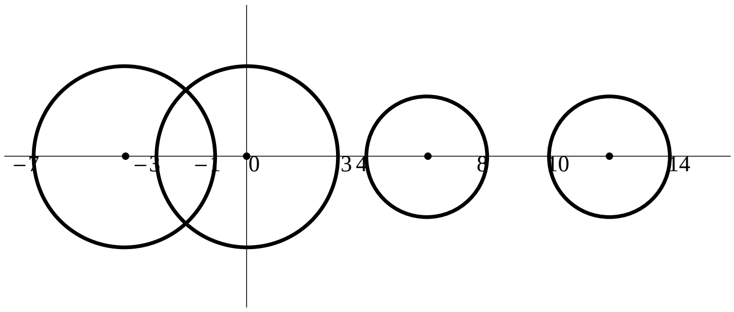
Le soluzioni possono essere infinite soltanto se $k = 2$. Inoltre il tal caso il teorema di Rouché-Capelli è verificato, e ponendo $x_4 = \alpha$, con α reale, si ottengono le soluzioni $\mathbf{x} = \alpha[\ -2,\ 2,\ -2,\ 1\ ]^T + [\ -1,\ 1,\ -1,\ 0\ ]^T$.

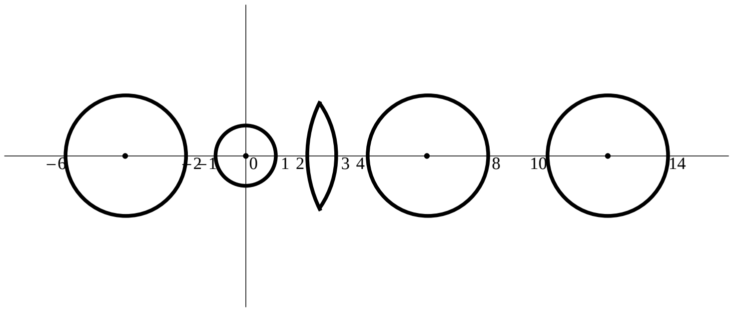
(b) Si deve minimizzare rispetto ad α la lunghezza $\sqrt{\mathbf{x}^T\mathbf{x}} = 13\alpha^2 + 12\alpha + 1$, che è minima per $\alpha = -6/13$. Quindi la soluzione di lunghezza minima è $\frac{1}{13}[\ -1,\ 1,\ -1,\ -6\ ]^T$.

Esercizio 3

Le tre figure seguenti riportano, nell'ordine, i cerchi per righe, i cerchi per colonne e l'intersezione delle rispettive unioni.







Dall'analisi dei cerchi per righe, poiché il cerchio di centro -4 e quello di centro 0 sono entrambi disgiunti dall'unione dei rimanenti, contengono ciascuno un solo autovalore, necessariamente reale. Quindi esistono due autovalori reali, λ_1 e λ_2, con $-6 \le \lambda_1 \le -2$ e $-1 \le \lambda_2 \le 1$.
Dall'analisi dei cerchi per colonne, poiché il cerchio di centro 6 e quello di centro 12 sono entrambi disgiunti dall'unione dei rimanenti, contengono ciascuno un solo autovalore, necessariamente reale. Quindi esistono due autovalori reali, λ_3 e λ_4, con $4 \le \lambda_3 \le 8$ e $10 \le \lambda_4 \le 14$.

(a) Dalle considerazioni precedenti segue che tutti gli autovalori sono reali e distinti. Due di loro sono positivi, uno è negativo, del restante non si può determinare il segno.

(b) L'autovalore di modulo massimo è λ_4, quindi $10 \le \rho \le 14$.

Esercizio 4

(a) Si ha $f(x_0) = 1$, $f(x_1) = 4$, $f(x_2) = 9$. I coefficienti del polinomio di interpolazione $p(x)$ sono la soluzione $\mathbf{a}$ del sistema $V\mathbf{a} = \mathbf{f}$, con

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Se si osserva che $\mathbf{f}$ coincide con la prima colonna di V si conclude immediatamente che la soluzione (unica perché V è non singolare) è $\mathbf{a} = \mathbf{e}_1$, quindi $a_0 = 1$, $a_1 = a_2 = 0$ e $p(x) = x^2$.

(b) (*facoltativo*) Si deve dimostrare per induzione sull'intero x che $\sum_{k=1}^{x}(2k-1) = x^2$. Per $x = 1$ la relazione è vera. La si supponga vera per gli interi minori o uguali di x e la si verifichi per l'intero $x + 1$: si ha $\sum_{k=1}^{x+1}(2k-1) = \sum_{k=1}^{x}(2k-1) + 2x + 1 = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$.