Soluzione della prova scritta di Algebra lineare del 2 febbraio 2012

Esercizio 1

(a) È evidente che per $k = 1$ la matrice è singolare perché la prima e la quarta colonna risultano uguali. Si potrebbe concludere che non esistono altri valori di k che rendono nullo il determinante, perché, per come è definito, $\det(A)$ è un polinomio di grado uno in k, in cui il coefficiente di k è il suo complemento algebrico

$$-\det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq 0.$$

Comunque, se si sviluppa il determinante con la regola di Laplace secondo l'ultima riga si ottiene:

$$\det A = -\det\begin{bmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 2 - k - 1 = -k + 1.$$

Quindi A è invertibile per ogni $k \neq 1$.

(b) Sia $k \neq 1$. Per calcolare l'inversa si applica il metodo di Gauss ai quattro sistemi lineari rappresentati dalla seguente matrice aumentata:

$$[A^{(1)}|B^{(1)}] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & k & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

$$[A^{(2)}|B^{(2)}] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & k & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-k & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1-k & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1-k & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Dopo aver scambiato la seconda e la terza riga

$$[A^{(3)}|B^{(3)}] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & k & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1-k & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-k & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right].$$

$$[A^{(4)}|B^{(4)}] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & k & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1-k & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-k & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k-1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right].$$

Sostituendo all'indietro o proseguendo con la variante di Gauss-Jordan si ottiene

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1-k} & \frac{1}{k-1} & \frac{1}{k-1} & \frac{k-2}{k-1} \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ \frac{1}{k-1} & \frac{1}{1-k} & \frac{1}{1-k} & \frac{1}{k-1} \end{bmatrix}.$$

Esercizio 2

(a) Con il metodo di Gauss si trasforma la matrice in forma triangolare:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si trova dunque che $\dim S(A) = \dim N(A) = 2$. Inoltre una base di $S(A)$ è formata dalle prime due colonne di A, $\mathbf{u}_1 = [\ 1,\ -1,\ -2,\ 0\ ]^T$, $\mathbf{u}_2 = [\ 3,\ -7,\ 2,\ -2\ ]^T$, mentre una base di $N(A)$ si trova risolvendo $T\mathbf{x} = \mathbf{0}$: le soluzioni hanno la forma

$$\alpha \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -3/2 \\ -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Due soluzioni linearmente indipendenti, e quindi una base di $N(A)$, sono $\mathbf{x}_1 = [\ -1,\ 1,\ 2,\ 0\ ]^T$, $\mathbf{x}_2 = [\ -3,\ -1,\ 0,\ 2\ ]^T$.

(b) V è un sottospazio di dimensione due, perché $\mathbf{v}_1$ $\mathbf{v}_2$ sono linearmente indipendenti. f è un'applicazione lineare tra due spazi di dimensione due, quindi la matrice B deve essere 2×2. Le due basi possono essere $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ per V e $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ per $S(A)$. Le sue colonne sono le soluzioni dei due sistemi lineari

$$[\ \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\ ] \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix} = A\mathbf{v}_1, \quad [\ \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\ ] \begin{bmatrix} b_{21} \\ b_{22} \end{bmatrix} A\mathbf{v}_2,$$

ovvero

$$[\ \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\ ]B = A[\ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\ ].$$

Sostituendo si ha il sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -7 \\ -2 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 6 & -6 \\ -10 & 10 \\ -4 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix},$$

a cui si applica il metodo di Gauss:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -4 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 6 & -6 \\ -4 & 4 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

e quindi

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

È $\mathrm{rk}(B) = 1$. Se B avesse rango massimo il sottospazio $f(V)$ avrebbe la stessa dimensione di V, cioè due, e quindi il rango della matrice $A[\ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\ ]$ dovrebbe essere due anziché uno.

Esercizio 3

(a) A è diagonalizzabile se e solo se ammette tre autovettori linearmente indipendenti. Si calcolano gli autovalori in funzione di α: il polinomio caratteristico è:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + (\alpha - 1)\lambda,$$

pertanto gli autovalori sono

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_{2,3} = \frac{3 \pm \sqrt{5 + 4\alpha}}{2}.$$

Se gli autovalori sono distinti i corrispondenti autovettori sono linearmente indipendenti. Dunque si devono studiare i casi in cui gli autovalori sono multipli: l'autovalore 0 ha molteplicità due per $\alpha = 1$, in tal caso A è simmetrica, e quindi diagonalizzabile. L'unico altro caso di autovalori multipli si ha per $\alpha = -5/4$: per questo valore $\lambda_2 = \lambda_3 = 3/2$. Gli autovettori corrispondenti sono nel nucleo della matrice:

$$A - 3/2I = \begin{bmatrix} -1/2 & 1 & 1 \\ 1 & -1/2 & -5/4 \\ 1 & 1 & -1/2 \end{bmatrix},$$

che con il metodo di Gauss si riporta alla forma triangolare

$$T = \begin{bmatrix} -1/2 & 1 & 1 \\ 0 & 3/2 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

e poiché $\mathrm{rk}(T) = 2$, $\dim(N(A - 3/2I)) = 1$ e quindi l'autovalore λ_2 non ammette due autovettori linearmente indipendenti. In conclusione A non è diagonalizzabile per il solo valore $\alpha = -5/4$.

(b) (*facoltativo*) Per $\alpha = 1$ gli autovalori sono $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, e $\lambda_3 = 3$. Una matrice S che diagonalizza A ha come colonne tre autovettori linearmente indipendenti: si calcolano quindi gli autovalori relativi a $\lambda_1 = 0$, che sono le soluzioni non nulle del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, e quindi hanno la forma $\alpha[\,-1,\ 1,\ 0\,]^T + \beta[\,-1,\ 0,\ 1\,]^T$. Gli autovettori relativi a λ_3 sono le soluzioni non nulle del sistema $(A - 3I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, e quindi hanno la forma $\gamma[\,1,\ 1,\ 1\,]^T$. Una scelta di S è la seguente:

$$S = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 4

(a) I coefficienti del polinomio di interpolazione $p_2(x)$ sono la soluzione $\mathbf{a}$ del sistema $V\mathbf{a} = \mathbf{f}$, con

$$V = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/16 & 1/4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Dopo aver permutato le righe nell'ordine (321) con una sola combinazione lineare, si ottiene la matrice aumentata triangolare superiore:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3/16 & 15/16 & 7/16 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

La soluzione è $\mathbf{a} = [\,-4/3,\ 7/3,\ 0\,]^T$, e quindi $p_2(x) = -4/3\,x^2 + 7/3\,x$.

(b) I coefficienti del polinomio di regressione lineare $p_1(x)$ sono la soluzione $\mathbf{b}$ del sistema $W^TW\mathbf{b} = W^T\mathbf{f}$, con

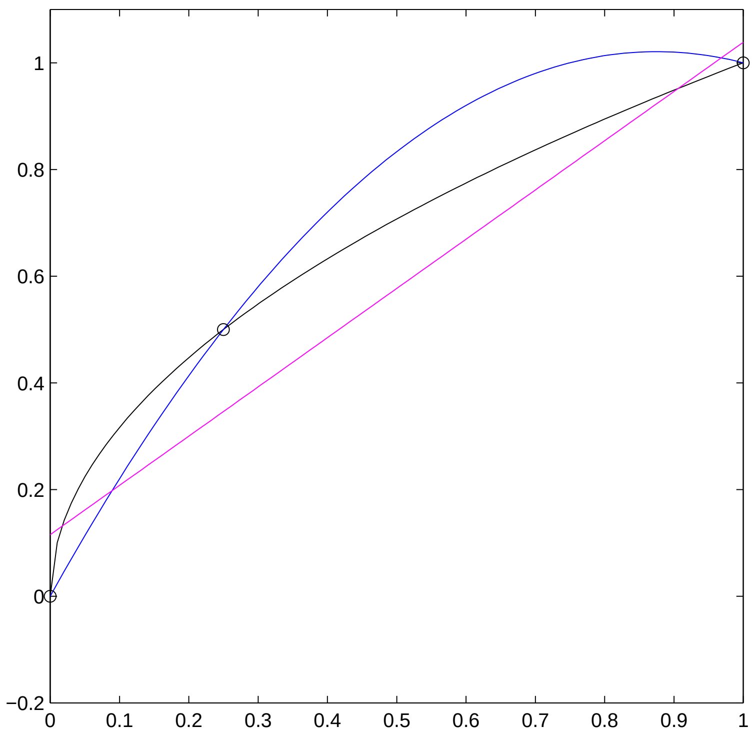
$$W = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/4 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

ovvero

$$\begin{bmatrix} 17/16 & 5/4 \\ 5/4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9/8 \\ 3/2 \end{bmatrix},$$

che ha soluzione $\mathbf{b} = [\,12/13,\ 3/26\,]^T$, quindi $p_1(x) = 12/13\,x + 3/26$.

(c) La seguente figura riporta i grafici di $f(x)$, in nero, di $p_2(x)$, in blu, e di $p_1(x)$, in magenta.



Risulta evidente che $\alpha = \max_{0\le x\le 1} |f(x) - p_2(x)|$ e $\beta = \max_{0\le x\le 1} |f(x) - p_1(x)|$ sono confrontabili.

In particolare β si calcola come il massimo in valore assoluto, tra il valore di $f(x) - p_1(x)$ nel punto stazionario $(13/24)^2$, e i valori assunti negli estremi, ovvero $97/624 = 0.1554\ldots$, $-3/26 = -0.1153\ldots$, e $-1/26 = -0.03846\ldots$. Quindi $\beta = 97/624$.

Non è possibile calcolare α senza determinare i punti stazionari di $f(x) - p_2(x)$, con la risoluzione di un'equazione algebrica di terzo grado. È comunque sufficiente approssimare, come appare possibile dal grafico, α con $|f(2/3) - p_2(2/3)| = 0.1465\ldots$. Si conclude dunque che $\alpha < \beta$.

Se si volesse provare in modo rigoroso che $\alpha < \beta$ si potrebbe procedere nel modo seguente. Si considerino le rette di equazioni $y = q_1(x) = 2x$, $y = q_2(x) = 10/13x + 4/13$, $y = q_3(x) = 5/9x + 4/9$, di cui, nella figura che segue, sono raffigurati in rosso tre segmenti. Dal grafico risulta che

$$\max_{0\le x\le 1/4} |f(x) - p_2(x)| \le \max_{0\le x\le 1/4} |f(x) - q_1(x)| = 1/8 = 0.125,$$

$$\max_{1/4\le x\le 16/25} |f(x) - p_2(x)| \le \max_{1/4\le x\le 16/25} |p_2(x) - q_2(x)| = 1225/8112$$
$$= 0.1550\ldots,$$

$$\max_{16/25\leq x\leq 1} |f(x)-p_2(x)| \leq \max_{16/25\leq x\leq 1} |p_2(x)-q_3(x)| = 4/27 = 0.1481\ldots,$$

dove i massimi sono i moduli dei valori in tre punti stazionari calcolabili facilmente. Quindi $\alpha \leq 1225/8112 < \beta$.