Soluzione della prova scritta
di Algebra lineare del 16 giugno 2009

Esercizio 1

(a) Applicando il metodo di Gauss si ottengono le matrici seguenti:

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad A^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^{(4)} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

dove, essendo $a_{33}^{(3)} = 0$, sono state scambiate la terza e la quarta riga, prima di calcolare $A^{(4)}$. Si ha $\dim S(A) = \mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A^{(4)}) = 3$, e dunque $\dim N(A) = 5 - \mathrm{rk}(A) = 2$.

Le prime tre colonne di $A^{(4)}$ sono linearmente indipendenti, pertanto lo sono anche le prime tre di A: una base di $S(A)$ è perciò formata dai vettori $[1\ 1\ -1\ 1\ 1]^T$, $[-1\ 1\ 3\ 1\ -1]^T$, $[1\ 2\ 0\ 1\ 0]^T$.

$N(A)$ è formato dalle soluzioni del sistema omogeneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, che si ottengono con la sostituzione all'indietro applicata al sistema $A^{(4)}\mathbf{x} = \mathbf{0}$, dopo aver posto $x_4 = \alpha$ e $x_5 = \beta$:

$$\mathbf{x} = \alpha \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Una base di $N(A)$ è perciò formata dai vettori $\mathbf{x}_1 = [-2\ -1\ 2\ 1\ 0]^T$, $\mathbf{x}_2 = [-2\ 0\ 1\ 0\ 1]^T$.

(b) Una base ortonormale $\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2\}$ di $N(A)$ si può costruire applicando il procedimento di Gram-Schmidt alla base $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$ ottenuta in (**a**).

$$\mathbf{t}_1 = \mathbf{x}_1, \quad \mathbf{y}_1 = \frac{\mathbf{t}_1}{\sqrt{\mathbf{t}_1^T \mathbf{t}_1}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{t}_2 = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_2^T\mathbf{y}_1\mathbf{y}_1 = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ -1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}_2 = \frac{\mathbf{t}_2}{\sqrt{\mathbf{t}_2^T\mathbf{t}_2}} = \frac{1}{2\sqrt{15}}\begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ -1 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 2

(a) È $\det A(k) = k^2 + 4k - 12$, che si annulla per $k_1 = -6$ e $k_2 = 2$.

(b) Gli elementi di Z sono le soluzioni di tutti i sistemi della forma

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ b \\ b \end{bmatrix},$$

al variare di b.

Applicando il metodo di Gauss, si ottiene la matrice aumentata finale:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 2 & b \\ 0 & -\frac{6}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{4}{5}b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Per ogni b il sistema ha infinite soluzioni $\mathbf{x}$, che, dopo aver posto $x_3 = \alpha$, si possono esprimere tutte nella forma:

$$\mathbf{x} = \alpha\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ 0 \end{bmatrix},$$

per cui si conclude che Z non è vuoto, che è uno spazio vettoriale in quanto formato da tutte le combinazioni lineari di due vettori, e che, essendo questi due vettori linearmente indipendenti, $\dim Z = 2$.

Esercizio 3

(a) Gli autovalori sono gli zeri del polinomio caratteristico $p(\lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda$, e quindi $\lambda_1 = 0$, e $\lambda_2 = \lambda_3 = 3$.

Gli autovettori relativi a $\lambda_1 = 0$, sono gli elementi non nulli del nucleo di

$$A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} 6 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & -1 \end{bmatrix},$$

che, triangolarizzata con il metodo di Gauss, diventa

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 & -3 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

e quindi gli autovettori sono $\alpha\,[1 \ -1 \ 1]^T$, per α reale non nullo.

Gli autovettori relativi a $\lambda_2 = \lambda_3 = 3$, sono gli elementi non nulli del nucleo di

$$A - \lambda_2 I = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -3 \\ -1 & -2 & 2 \\ 5 & 4 & -4 \end{bmatrix},$$

che, triangolarizzata con il metodo di Gauss, diventa

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

e quindi gli autovettori sono $\alpha\,[0 \ 1 \ 1]^T$, per α reale non nullo.

(b) A non è diagonalizzabile, perché la molteplicità geometrica dell'autovalore λ_2 è minore della sua molteplicità algebrica, e quindi non esistono tre autovettori linearmente indipendenti.

Esercizio 4

(a) I coefficienti di $p(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2$ sono la soluzione del sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ \alpha^2 & \alpha & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \alpha^3 + 1 \end{bmatrix},$$

che, affrontato con il metodo di Gauss, dà la matrice aumentata finale:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha^2 + \alpha & 1 - \alpha^2 & \alpha^3 + 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Sostituendo all'indietro si ottiene $a_2 = 1,\ a_1 = \alpha,\ a_0 = \alpha - 1$, e quindi $p(x) = (\alpha - 1)x^2 + \alpha x + 1$.

(b) La formula del resto

$$r(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\frac{f'''(\xi)}{3!},$$

poiché $f'''(x) = 3!$, diventa

$$r(x) = (x + 1)(x - 0)(x - \alpha) = x^3 + (1 - \alpha)x^2 - \alpha x,$$

e dunque si ottiene $p(x) = f(x) - r(x) = (\alpha - 1)x^2 + \alpha x + 1$.

Per $\alpha \to 0$ $p(x)$ tende al polinomio $q(x) = -x^2 + 1$, ovvero il polinomio di interpolazione tende ad un polinomio che assume gli stessi valori di $f(x)$ in x_0 e in $x_1 = x_2$, e inoltre ha la proprietà $q'(x_1) = f'(x_1)$.