Soluzione della prova scritta di Algebra lineare del 13 luglio 2010

Esercizio 1

(a) Con il metodo di Gauss trasforma $A(\alpha)$ in forma triangolare. Da $A^{(1)} = A(\alpha)$ si ottiene

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & \alpha - 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & \alpha - 2 & 1 \\ 0 & 0 & -\alpha + 1 & 1 \\ 0 & 0 & -\alpha + 1 & -1 \end{bmatrix},$$

e, per $\alpha \neq 1$,

$$A^{(4)} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & \alpha - 2 & 1 \\ 0 & 0 & -\alpha + 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix},$$

e risulta $\mathrm{rk}(A(\alpha)) = 4$. Per $\alpha = 1$, invece, si ha

$$A^{(4)'} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

e risulta $\mathrm{rk}(A(1)) = 3$. Quindi, $\mathrm{rk}(A(\alpha)) < 4$ solo per $\alpha = \bar{\alpha} = 1$.

(b) Esaminando $A^{(4)'}$ si ha che $A(1)$ ha le colonne di indici 1,2 e 4 linearmente indipendenti, quindi tali colonne costituiscono una base di $S(A)$.

(c) Se si sceglie B come la matrice 4×3 avente come colonne le colonne linearmente indipendenti di $A(1)$ trovate in (b), la matrice C, per rispettare l'uguaglianza $A(1) = BC$, deve avere la forma

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_1 & 0 \\ 0 & 1 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & 1 \end{bmatrix},$$

dove $\mathbf{x}^T = [x_1\ x_2\ x_3]$, è l'unica soluzione del sistema $A(1)\mathbf{x} = \mathbf{a}_3$, con $\mathbf{a}_3$ terza colonna di $A(1)$. Se si sfrutta la forma triangolare $A^{(4)'}$ già calcolata in (b), si ha immediatamente il sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

che, risolto all'indietro dà $\mathbf{x}^T = [\frac{3}{2} \ \ -\frac{1}{2} \ \ 0]$. Quindi:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 2

(a) Con lo sviluppo di Laplace secondo la prima riga (o, in alternativa, con la regola di Sarrus o con il metodo di Gauss) si ottiene

$$\det A = a \det \begin{bmatrix} 0 & -a \\ -a & -a \end{bmatrix} - a \det \begin{bmatrix} a & -a \\ 0 & -a \end{bmatrix} = -a^3 + a^3 = 0.$$

(b) A è simmetrica, quindi è diagonalizzabile per ogni valore di a.

(c) (*facoltativo*) Il risultato è ottenibile in diversi modi, tutti più diretti rispetto al calcolo di $\det A_n$ con il metodo di Gauss.

Se, per n dispari, si sommano tutte le colonne di indici dispari e poi si sottraggono tutte le colonne di indici pari si ottiene il vettore nullo. Quindi le colonne sono linearmente dipendenti, e pertanto $\det A_n = 0$.

Oppure, se si somma all'ultima riga la prima, e poi si somma all'ultima colonna la prima si ha che

$$\det A_n = \det \begin{bmatrix} a & a & a & \cdots & a & a & a \\ a & a & a & \cdots & a & 0 & 0 \\ & \cdots & & \cdots & & \cdots & \\ a & 0 & -a & \cdots & -a & -a & 0 \\ a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \det \begin{bmatrix} a & a & a & \cdots & a & a & a \\ a & & & & & & 0 \\ \vdots & & & A_{n-2} & & & \vdots \\ a & & & & & & 0 \\ a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = (-1)^{(2n+1)} a^2 \det A_{n-2}.$$

Ne segue che, per n dispari, $\det A_n$ è nullo perché lo è $\det A_3$, come visto al punto (a).

Oppure, se si chiama J la matrice ottenuta dalla matrice identica di ordine n permutando le colonne in ordine inverso, e se si osserva che $JA_nJ = -A_n$, per il teorema di Binet si ha $\det(J)^2 \det(A_n) = (-1)^n \det(A_n)$, e, per n dispari, questo è possibile solo se $\det A_n = 0$.

Esercizio 3

(a) Poiché gli autovalori appartengono all'unione dei cerchi per righe K_i, per ogni autovalore λ_j si ha $|\lambda_j| \le \max\limits_i(\max\limits_{z\in K_i}|z|) = \max(7,5,6) = 7$. Analogamente, per i cerchi per colonne H_i, si trova $|\lambda_j| \le \max\limits_i(\max\limits_{z\in H_i}|z|) = \max(7,6,5) = 7$. Quindi $\max\limits_j |\lambda_j| \le 7$.

(b) Applicando il teorema di Gerschgorin agli autovalori μ_j di A^2, dove

$$A^2 = \begin{bmatrix} 21 & 3 & 11 \\ 5 & 12 & -3 \\ 10 & -8 & 10 \end{bmatrix},$$

si ha $|\mu_j| \le \max\limits_i(\max\limits_{z\in K_i}|z|) = \max(35,20,28) = 35$, e $|\mu_j| \le \max\limits_i(\max\limits_{z\in H_i}|z|) = \max(36,23,24) = 36$. Quindi $\max\limits_j |\mu_j| \le \min(35,36) = 35$.

Ma vale la relazione $\mu_j = \lambda_j^2$, ne segue che $\max\limits_j |\lambda_j| = \sqrt{\max\limits_j |\mu_j|} \le \sqrt{35} < 7$.

(c) Il polinomio caratteristico di A risulta

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 19\lambda - 4 = (\lambda - 4)(-\lambda^2 + 5\lambda + 1).$$

Dunque gli autovalori sono

$$\lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = (5 - \sqrt{29})/2, \quad \lambda_3 = (5 + \sqrt{29})/2.$$

La limitazione trovata in (b) è verificata:

$$\max_j |\lambda_j| = |\lambda_3| = (5 + \sqrt{29})/2 < \sqrt{35}.$$

Esercizio 4

(a) I coefficienti di $p(x) = a_0 x^2 + a_1 x + a_2$ sono la soluzione del sistema

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ k^4 & k^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ k \\ 1 \end{bmatrix},$$

che con il metodo di Gauss si riconduce al sistema con matrice triangolare

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & k^2 - k^4 & 1 - k^4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ k - k^4 \\ 0 \end{bmatrix},$$

che, risolto all'indietro, dà $a_2 = 0$, $a_1 = (k^2 + k + 1)/(k(k+1))$, $a_0 = -1/(k(k+1))$. Quindi

$$p(x) = -\frac{1}{k(k+1)} x^2 + \frac{k^2 + k + 1}{k(k+1)} x.$$

(b) I coefficienti di $q(x) = b_0 x^2 + b_1 x + b_2$ sono la soluzione del sistema

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2k^2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/(2k) \\ 1 \end{bmatrix},$$

che con il metodo di Gauss si riconduce al sistema con matrice triangolare

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 - 2k^2 & -2k^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/(2k) - 2k^2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

che, per $k \neq 1/\sqrt{2}$ ha la soluzione unica $b_2 = 0$, $b_1 = (1 - 4k^3)/(2k(1 - 2k^2))$, $b_0 = (2k-1)/(2k(1-2k^2))$. Quindi

$$q(x) = \frac{2k - 1}{2k(1 - 2k^2)} x^2 + \frac{1 - 4k^3}{2k(1 - 2k^2)} x.$$

Per $k = 1/\sqrt{2}$ al termine della triangolarizzazione si ha la matrice aumentata

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1/\sqrt{2} - 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} - 1 \end{array}\right],$$

e quindi, per il teorema di Rouché-Capelli, non ci sono soluzioni.

(c) Poiché $\lim_{k \to 1} a_0 = \lim_{k \to 1} b_0 = -1/2$ e $\lim_{k \to 1} a_1 = \lim_{k \to 1} b_1 = 3/2$, $p(x)$ e $q(x)$ tendono allo stesso polinomio.