Soluzione della prova scritta
di Algebra Lineare del 10 settembre 2010

Esercizio 1

(a) I vettori $\mathbf{x}$ di S sono le soluzioni del sistema lineare omogeneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ovvero $S = N(A)$. Con il metodo di Gauss trasforma A nella forma triangolare

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

per cui $\text{rank}(A) = 2$ e $\dim N(A) = 4 - \text{rank}(A) = 2$. Come colonne linearmente indipendenti possono essere scelte la prima e la terza, quindi ponendo $x_2 = \alpha$ e $x_4 = \beta$ si ottiene per sostituzione $x_3 = \beta$ e $x_1 = -\alpha - \beta$. I vettori di S hanno la forma

$$\mathbf{x} = \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

e come vettori di una base si possono scegliere $\mathbf{v}_1^T = [\ -1\ 1\ 0\ 0\ ]$ e $\mathbf{v}_2^T = [\ -1\ 0\ 1\ 1\ ]$.

(b) A $S^\perp$ appartengono tutti e soli i vettori $\mathbf{y}$ ortogonali a $\mathbf{v}_1$ e a $\mathbf{v}_2$, quindi $S^\perp = N(B)$, dove B è la matrice

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

che, con Gauss, si triangolarizza nella forma

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ponendo $y_3 = \gamma$ e $y_4 = \delta$ si ottiene per sostituzione $y_2 = \gamma + \delta$ e $y_1 = -\gamma - \delta$. I vettori di $S^\perp$ hanno la forma

$$\mathbf{y} = \gamma \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \delta \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

e come vettori di una base si possono scegliere $\mathbf{v}_3^T = [\ 1\ 1\ 1\ 0\ ]$ e $\mathbf{v}_4^T = [\ 1\ 1\ 0\ 1\ ]$.

(c) Il vettore dei coefficienti α_i è la soluzione, unica, del sistema lineare

$$\left[\ \mathbf{v}_1 \ \mid\ \mathbf{v}_2 \ \mid\ \mathbf{v}_3 \ \mid\ \mathbf{v}_4\ \right] \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} = \mathbf{e},$$

la cui matrice aumentata

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

viene ricondotta alla forma triangolare

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{3} & 1 \end{array}\right],$$

dalla quale, per sostituzione all'indietro si ottiene

$$\alpha_4 = \frac{3}{5},\ \alpha_3 = \frac{3}{5},\ \alpha_4 = \frac{2}{5},\ \alpha_4 = -\frac{1}{5}\ .$$

Esercizio 2

Le matrici A_n hanno la forma seguente:

$$A_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

(a) Con lo sviluppo di Laplace secondo l'ultima riga (o, analogamente, secondo la prima colonna) si ottiene

$$\det A_n = (-1)^{2n-1}(-1)\det A_{n-1} + (-1)^{2n} \cdot 1 \cdot \det A_{n-1} = 2\det A_{n-1}.$$

Applicando tale relazione ad A_{n-1}, poi ad A_{n-2}, fino ad A_2, si ha

$$\det A_n = 2\det A_{n-1} = 2^2\det A_{n-2} = 2^3\det A_{n-3} = \cdots = 2^{n-2}\det A_2 = 2^{n-1}.$$

(b) Applicando il metodo di Gauss ad $A^{(1)} = A_n$ si ottengono successivamente le matrici seguenti:

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\cdots$$

$$A^{(n-1)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

da cui risulta

$$\det A_n = \det A^{(n-1)} = 2^{n-1}.$$

Esercizio 3

Sviluppando il determinante $\det(A - \lambda I)$ con la regola di Laplace secondo la prima riga si ottiene immediatamente il polinomio caratteristico

$$p(\lambda) = \lambda^4 - 1,$$

pertanto gli autovalori sono le radici quarte dell'unità $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = \mathbf{i}$, $\lambda_4 = -\mathbf{i}$. Gli autovalori sono tutti distinti, quindi esiste una base di autovettori e la matrice è diagonalizzabile.

Le possibili matrici S delle trasformazioni che diagonalizzano A hanno per colonne i vettori di una base di autovettori. Gli autovettori, ottenuti risolvendo i quattro sistemi lineari omogenei $A - \lambda_i I = 0$, sono

$$\text{per } \lambda_1 = 1: \quad \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{per } \lambda_2 = -1: \quad \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\text{per } \lambda_3 = \mathbf{i}: \quad \alpha \begin{bmatrix} -\mathbf{i} \\ -1 \\ \mathbf{i} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{per } \lambda_4 = -\mathbf{i}: \quad \alpha \begin{bmatrix} \mathbf{i} \\ -1 \\ -\mathbf{i} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Si può scegliere

$$S = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -\mathbf{i} & \mathbf{i} \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & \mathbf{i} & -\mathbf{i} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(*facoltativo*) Si ottiene $A^4 = I$. Da $A^3 A = I$ si deduce, per l'unicità dell'inversa, che $A^{-1} = A^3$.

Esercizio 4

(a) I coefficienti di $p(x) = a_0 x^2 + a_1 x + a_2$ sono la soluzione del sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1+\alpha \\ 2 \end{bmatrix},$$

che con il metodo di Gauss si riconduce al sistema con matrice triangolare

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1+\alpha \end{bmatrix},$$

che, risolto all'indietro, dà $a_2 = 1+\alpha$, $a_1 = 1$, $a_0 = -\alpha$. Quindi

$$p(x) = -\alpha x^2 + x + 1 + \alpha.$$

(b) I coefficienti di $q(x) = b_0 x + b_1$ sono la soluzione del sistema

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3+\alpha \end{bmatrix},$$

che ha soluzione $b_0 = 1$, $b_1 = 1 + \alpha/3$. Quindi

$$q(x) = x + 1 + \alpha/3.$$

(c) Per $\alpha = 0$, $p(x) \equiv q(x) = x + 1$. Si ha $p(x) - q(x) = \alpha(-x^2 + 2/3)$, e quindi $m = \max\limits_{-1 \le x \le 1} |p(x) - q(x)| = \dfrac{2}{3}|\alpha|$. Affinchè sia $m \le 10^{-3}$ deve essere $|\alpha| \le \frac{3}{2} 10^{-3}$.