Soluzione della prova scritta di Algebra Lineare del 17 febbraio 2011

Esercizio 1

La matrice A è la seguente

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

(a) Con il metodo di Gauss si ottengono successivamente le seguenti matrici:

$$A^{(1)} = A, \quad A^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -3 & -3 \\ 0 & -4 & -6 & -2 \end{bmatrix},$$

$$A^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad A^{(4)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

per cui $\det A = \det A^{(4)} = -1$.

(b) La matrice dei complementi algebrici è

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

l'aggiunta è $\operatorname{adj}(A) = C^T$ e infine

$$A^{-1} = \frac{1}{\operatorname{adj}(A)} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 2

(a) Esistono vettori $\mathbf{v}$ non nulli tali che $A\mathbf{v} = A^2\mathbf{v}$ se e solo se $A - A^2$ è singolare, ovvero ammette 0 come autovalore. Gli autovalori di $A - A^2$ sono della forma $\lambda - \lambda^2$ dove λ è autovalore di A. Quindi bisogna e basta che sia $\lambda(1 - \lambda) = 0$, cioè $\lambda = 0$ (A singolare) oppure $\lambda = 1$.

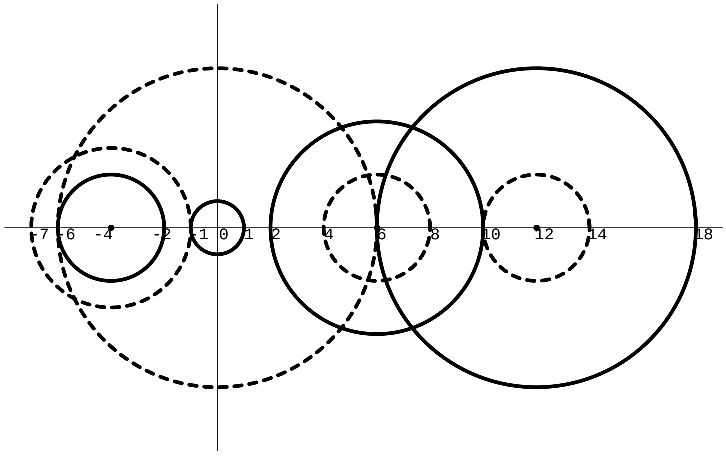
(b) La matrice assegnata ha autovalori 1 e 3, quindi soddisfa la condizione trovata al punto (a). I vettori $\mathbf{v}$ sono gli autovettori di A relativi all'autovalore 1, che sono le soluzioni del sistema

$$(A - I)\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{v} = \mathbf{0},$$

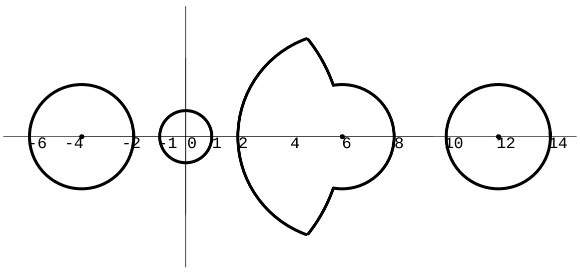
e sono tutti i vettori della forma $\mathbf{v} = k[\,1 \;\; -1\,]^T$, $k \in \mathbf{R}$.

Esercizio 3

I cerchi di Gerschgorin per riga (linea continua) e per colonna (linea tratteggiata) sono i seguenti:



Dall'analisi dei cerchi per riga si individuano due autovalori reali λ_2 e λ_3, con $-6 \leq \lambda_2 \leq -2$ e $-1 \leq \lambda_3 \leq 1$. Dall'analisi dei cerchi per colonna si individua un autovalore reale λ_4, con $10 \leq \lambda_4 \leq 14$. Ne segue che anche il restante autovalore λ_1 deve essere reale. Dall'intersezione dell'unione dei cerchi per riga con l'unione dei cerchi per colonna raffigurata qui di seguito risulta che λ_1 appartiene all'intervallo $[2, 8]$.



(a) Non si può escludere che A sia singolare, poiché 0 appartiene all'intersezione sopra rappresentata. Tuttavia, applicando la regola di Laplace alla terza riga di A si ottiene $\det A = \det B \neq 0$, dal momento che B ha predominanza diagonale per righe.

(b) Dall'esame dei cerchi di Gerschgorin si ha che tutti gli autovalori sono reali e distinti. Almeno due sono positivi, almeno uno è negativo, dunque non sono tutti positivi.

(c) A è diagonalizzabile perché ha autovalori distinti.

(d) (*facoltativo*) Detto $\lambda_{\max}$ l'autovalore di massimo modulo, è necessariamente $10 \leq |\lambda_{\max}| \leq 14$. L'autovalore di massimo modulo di A^{-1} (che esiste perchè $\det A \neq 0$) è il reciproco di $\lambda_{\min}$, autovalore di minimo modulo di A, che appartiene al cerchio di centro 0 e raggio 1. Pertanto $1 \leq 1/|\lambda_{\min}|$, mentre non esite limitazione superiore.

Esercizio 4

(a) I coefficienti di $p(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2$ sono la soluzione del sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

che ha soluzione $a_2 = 1$, $a_1 = 0$, $a_0 = -1$. Quindi

$$p(x) = -x^2 + 1.$$

(b) Il resto $r(x) = f(x) - p(x)$ si può esprimere nel modo seguente:

$$r(x) = x(x^2 - 1)\frac{\pi^3}{8 \cdot 3!} \sin\left(\frac{\xi\pi}{2}\right),$$

dove x e ξ appartengono all'intervallo $[-1,\ 1]$. Per $|x| < 1$, $r(x)$ ha il segno di $-x \sin\left(\frac{\xi\pi}{2}\right)$, che non è direttamente determinabile.

Si esegue allora uno studio di funzione di $r(x)$, limitatamente all'intervallo $[0,\ 1]$, dal momento che, nel caso in esame, $r(-x) = r(x)$. È sufficiente tener conto che $r(0) = r(1) = 0$, $r'(x) = 2x - \frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{x\pi}{2}\right)$ si annulla in 0 e in un solo punto m in $(0,\ 1]$, e che $r''(x) = 2 - \frac{\pi^2}{4} \cos\left(\frac{x\pi}{2}\right)$ è negativa in un intorno destro di 0, per poter disegnare il grafico sotto riportato.

Risulta dunque che per $0 < |x| < 1$ è $r(x) < 0$ e quindi $f(x) < p(x)$. Si conclude che per $-1 \leq x \leq 1$ $f(x) \leq p(x)$, dove l'uguaglianza vale solo per $x = x_i$.

Grafico di $r(x)$