Soluzione della prima prova intermedia
di Algebra lineare del 15 aprile 2010

Esercizio 1

(a) La i-esima colonna di A è il vettore $f(\mathbf{e}_i)$, dove i vettori $\mathbf{e}_i$, $i = 1, \ldots, 4$ sono i quattro vettori della base canonica di $\mathbf{R}^4$. Dunque:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 7 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Il metodo di Gauss applicato al sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, le cui soluzioni formano il nucleo $N(A)$, produce le seguenti matrici aumentate:

$$[A^{(1)}|\mathbf{b}^{(1)}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 7 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right],$$

$$[A^{(2)}|\mathbf{b}^{(2)}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 9 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right],$$

$$[A^{(3)}|\mathbf{b}^{(3)}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 9 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Pertanto, essendo il sistema omogeneo e $\mathrm{rk}(A^{(3)}) = \mathrm{rk}(A) = 2 < n = 4$, si hanno infinite soluzioni: è $\dim(N(A)) = n - \mathrm{rk}(A) = 2$.

Dopo aver assegnato valori arbitrari α e β rispettivamente a x_4 e x_3, si ottiene, sostituendo all'indietro:

$$\mathbf{x} = \beta \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} -\frac{7}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Come base di $N(A)$ si può scegliere quella formata dai vettori

$$\mathbf{u}_1 = [\ -1\ \ -1\ 3\ 0\ ]^T, \qquad \mathbf{u}_2 = [\ -7\ \ -1\ 0\ 3\ ]^T.$$

Per quanto riguarda $S(A)$, la sua dimensione è $\mathrm{rk}(A) = 2$, e come vettori di una base si possono prendere le prime due colonne di A:

$$\mathbf{v}_1 = [\ 1\ \ -1\ 0\ 1\ ]^T, \qquad \mathbf{v}_2 = [\ 2\ 7\ \ -3\ 5\ ]^T.$$

(b) È noto che $S(A)^\perp = N(A^T)$, o, equivalentemente, $S(A)$=$N(A^T)^\perp$. Quest'ultima relazione, applicata ad A^T, dà $S(A^T) = N(A)^\perp$. Quindi come base di $N(A)^\perp$ si può prendere una base di $S(A^T)$.

Se si triangolarizza A^T con il metodo di Gauss si ottiene la forma

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 9 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$S(A^T)$ è dunque generata dalle prime due colonne di A^T

$$\mathbf{z}_1 = [\ 1\ 2\ 1\ 3\ ]^T, \qquad \mathbf{z}_2 = [\ -1\ 7\ 2\ 0\ ]^T,$$

che formano anche una base per $N(A)^\perp$.

(c) La matrice B è 2×2 e i suoi elementi b_{ij} soddisfano le relazioni:

$$g(\mathbf{z}_1) = b_{11}\mathbf{v}_1 + b_{21}\mathbf{v}_2,$$

$$g(\mathbf{z}_2) = b_{12}\mathbf{v}_1 + b_{22}\mathbf{v}_2,$$

ovvero

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} g(\mathbf{z}_1) & g(\mathbf{z}_2) \end{bmatrix},$$

quindi le colonne di B sono le soluzioni dei due sistemi lineari:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 7 \\ 0 & -3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 15 \\ -10 \\ 25 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 7 \\ 0 & -3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 54 \\ -23 \\ 38 \end{bmatrix}.$$

Applicando Gauss simultaneamente ai due sistemi, che hanno la stessa matrice dei coefficienti, si ottiene alla fine la matrice aumentata

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 15 & 15 \\ 0 & 9 & 39 & 69 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

e, sostituendo all'indietro, si calcolano le colonne di B:

$$B = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 19 & -1 \\ 13 & 23 \end{bmatrix}.$$

Se si fossero considerate in $N(A)^{\perp}$ o in $S(A)$ basi diverse si sarebbe ottenuta una diversa matrice B.

È $\det B \neq 0$, quindi B è invertibile. Ma deve esserlo necessariamente, perché se non lo fosse, esisterebbe qualche vettore $\mathbf{x} \in R^2$ non nullo tale che $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$, ma allora il vettore $\mathbf{z} = x_1\mathbf{z}_1 + x_2\mathbf{z}_2$, che appartiene a $N(A)^{\perp}$, essendo $g(\mathbf{z}) = f(\mathbf{z}) = \mathbf{0}$, apparterrebbe anche a $N(A)$, e questo è impossibile perché due sottospazi ortogonali non hanno in comune vettori non nulli.

Esercizio 2

(a) La regola di Laplace applicata alla prima riga dà:

$$\det A = k \det \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & k \end{bmatrix} - \det \begin{bmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = k^4 - 1.$$

Quindi A è invertibile per $|k| \neq 1$.

(a) Basta risolvere con il metodo di Gauss il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{e}_1$, supponendo $|k| \neq 1$:

$$[A|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cccc|c} k & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k & 0 \end{array}\right].$$

Per non trattare separatamente il caso $k = 0$, conviene permutare le righe nel modo seguente, ottenendo poi pivot tutti uguali a 1:

$$[A^{(1)}|\mathbf{b}^{(1)}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k & 0 \\ k & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

$$[A^{(2)}|\mathbf{b}^{(2)}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & -k^2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right],$$

$$[A^{(3)}|\mathbf{b}^{(3)}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & k^3 & 1 & 1 \end{array}\right],$$

$$[A^{(4)}|\mathbf{b}^{(4)}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-k^4 & 1 \end{array}\right].$$

Sostituendo all'indietro si ha infine

$$\mathbf{x}^T = \frac{1}{k^4-1}\left[\begin{array}{cccc} k^3 & -k^2 & k & -1 \end{array}\right].$$

Esercizio 3

(a) È sufficiente verificare che V è chiuso rispetto alla somma e alla moltiplicazione per scalare. Infatti se B e C commutano con A, anche $B+C$ e αB, con α scalare, commutano con A.

Per determinare la dimensione e una base di V, si considera il sistema lineare che deve essere risolto dagli elementi di B, generica matrice che commuta con A:

$$B = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}, \qquad AB = BA,$$

$$\begin{bmatrix} \alpha+2\gamma & \beta+2\delta \\ \alpha+\gamma & \beta+\delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha+\beta & 2\alpha+\beta \\ \gamma+\delta & 2\gamma\delta \end{bmatrix},$$

$$\left\{\begin{array}{c} -\beta+2\gamma=0 \\ -2\alpha+2\delta=0 \\ \alpha-\delta=0 \\ \beta-2\gamma=0 \end{array}\right. .$$

Riordinando le equazioni si ha il sistema lineare omogeneo :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{bmatrix} = \mathbf{0},$$

la cui matrice M si riduce alla forma triangolare

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Se ne deduce che $\mathrm{rk}(M) = 2$, e quindi $\dim(V) = 4 - \mathrm{rk}(A) = 2$. Tutte le soluzioni si possono esprimere assegnando valori arbitrari a δ e a γ, e ricavando così $\alpha = \delta$, $\beta = 2\gamma$:

$$B = \begin{bmatrix} \delta & 2\gamma \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} = \gamma \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \delta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Una base è $\{B_1, I\}$, dove $B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

(b) (*facoltativo*) Data $A = [a_{ij}]$ 2×2, e procedendo in modo analogo al punto (a), si ottiene il sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} -a_{21}\beta + a_{12}\gamma = 0 \\ -a_{12}\alpha + (a_{11} - a_{22})\beta - a_{12}\delta = 0 \\ a_{21}\alpha + (a_{22} - a_{11})\gamma - a_{21}\delta = 0 \\ a_{21}\beta - a_{21}\gamma = 0 \end{cases},$$

la cui matrice dei coefficienti è

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -a_{21} & a_{12} & 0 \\ -a_{12} & a_{11} - a_{22} & 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 & a_{22} - a_{11} & -a_{21} \\ 0 & a_{21} & -a_{12} & 0 \end{bmatrix}.$$

Volendo calcolarne il rango, se si aggiunge alla quarta riga la prima e alla quarta colonna la prima si ottiene

$$\begin{bmatrix} 0 & -a_{21} & a_{12} & 0 \\ -a_{12} & a_{11} - a_{22} & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{22} - a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Quindi $\mathrm{rk}(M) = \mathrm{rk}(M_1)$, dove $M_1 = \begin{bmatrix} 0 & -a_{21} & a_{12} \\ -a_{12} & a_{11} - a_{22} & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{22} - a_{11} \end{bmatrix}$.
Ma con Laplace o la regola di Sarrus di trova facilmente che $\det M_1 = 0$, ne segue che $\mathrm{rk}(M_1) \leq 2$, ed è possibile che sia $\mathrm{rk}(M_1) = 2$, come nel caso proposto in (a). Allora $\dim(V) = 4 - \mathrm{rk}(M) = 4 - \mathrm{rk}(M_1) \geq 4 - 2 = 2$.

In alternativa, si arriva rapidamente allo stesso risultato osservando che V contiene A e I: se sono linearmente indipendenti, allora $\dim(V) \geq 2$, altrimenti deve essere $A = \alpha I$, ma in tal caso A commuta con qualunque matrice, quindi $\dim(V) = 4$.