Soluzione della prima prova intermedia di
di Algebra lineare del 27 novembre 2015

Esercizio 1

(a) Per entrambe le copie di $\mathbb{R}^4$ la base scelta è la base canonica, quindi la colonna j-esima di A è il vettore $f(\boldsymbol{e}_j)$. Si ottiene dunque

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A ha l'ultima riga uguale alla prima cambiata di segno, quindi non è invertibile e pertanto non lo è neanche f.

(b) Con il metodo di Gauss A viene ricondotta alla forma triangolare

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

a cui si ha che sia $S(A)$ che $N(A)$ hanno dimensione due. Una base di $S(A)$ è formata dalle prime due colonne di A, $\boldsymbol{v}_1 = [1,\, 0,\, 0,\, -1]^T$ e $\boldsymbol{v}_2 = [0,\, 1,\, -1,\, 0]^T$. I vettori di $N(A)$ hanno la forma $[\alpha, \beta, \beta, \alpha]^T$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, quindi una base di $N(A)$ è formata dai vettori $\boldsymbol{z}_1 = [1,\, 0,\, 0,\, 1]^T$ e $\boldsymbol{z}_2 = [0,\, 1,\, 1,\, 0]^T$.

(c) L'applicazione f' è definita da $S(A)$ in $S(A)$, quindi la matrice B è 2×2. Gli elementi b_{ij} di B sono definiti dalle relazioni

$$f(\boldsymbol{v}_1) = b_{11}\boldsymbol{v}_1 + b_{21}\boldsymbol{v}_2, \quad f(\boldsymbol{v}_2) = b_{12}\boldsymbol{v}_1 + b_{22}\boldsymbol{v}_2,$$

che possono essere riscritte come

$$[f(\boldsymbol{v}_1)|f(\boldsymbol{v}_2)] = [\boldsymbol{v}_1|\boldsymbol{v}_2]B,$$

ovvero

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix},$$

che sono due sistemi lineari, con la stessa matrice dei coefficienti, aventi per soluzioni le due colonne di B. La matrice aumentata è la seguente:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right],$$

che viene ricondotta alla forma triangolare

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

La soluzione (unica) è dunque

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(d) B è invertibile se (e solo se) lo è f'. Sia allora $f'(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$ per un vettore $\boldsymbol{x} \in S(A)$: si vuole dimostrare che è necessariamente $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Essendo $f'(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$, si ha $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, quindi $\boldsymbol{x} \in N(A) = S(A^T)^{\perp}$. Ma A è simmetrica, quindi $\boldsymbol{x} \in S(A)^{\perp}$: allora $\boldsymbol{x} \in S(A) \cap S(A)^{\perp}$, questo implica $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

Esercizio 2

I vettori assegnati sono:

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(a) I vettori assegnati sono linearmente indipendenti perché la matrice

$$[\boldsymbol{x}_1|\boldsymbol{x}_2|\boldsymbol{x}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ha rango tre, infatti il suo determinante vale 1. Si applica il procedimento di Gram-Schmidt:

$$\boldsymbol{t}_1 = \boldsymbol{x}_1, \quad \boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{t}_1/||\boldsymbol{t}_1|| = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{t}_2 = \boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_2^T \boldsymbol{y}_1 \boldsymbol{y}_1 = 1/2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{t}_2/||\boldsymbol{t}_2|| = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{t}_3 = \boldsymbol{x}_3 - \boldsymbol{x}_3^T \boldsymbol{y}_1 \boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{x}_3^T \boldsymbol{y}_2 \boldsymbol{y}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{y}_3 = \boldsymbol{t}_3/||\boldsymbol{t}_3|| = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

(b) Il vettore $Y\boldsymbol{e}$ è $[\,0,\ \sqrt{2},\ 1\,]^T$. Sia $\boldsymbol{e}$ che $Y\boldsymbol{e}$ hanno lunghezza $\sqrt{3}$. La ragione è la seguente:

$$||Y\boldsymbol{e}|| = \sqrt{\boldsymbol{e}^T Y^T Y \boldsymbol{e}} = \sqrt{\boldsymbol{e}^T \boldsymbol{e}} = ||\boldsymbol{e}||,$$

perché $Y^T Y = I$, essendo le colonne di Y vettori ortonormali.

Esercizio 3

(a) Si applica il metodo di Gauss e, dopo aver scambiato la prima e la seconda riga, si ottiene la matrice aumentata finale

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & k+1 & 0 \end{array}\right].$$

Per $k \neq -1$ la matrice è non singolare e la soluzione esiste unica. Per $k = -1$ la matrice è singolare e il teorema di Rouché-Capelli è verificato, quindi esistono infinite soluzioni. Pertanto il valore richesto di k è -1.

(b) Per $k = -1$ le soluzioni hanno la forma $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{z}$ dove $\boldsymbol{u}$ è una soluzione particolare e $\boldsymbol{z}$ è un generico vettore di $N(A)$. $\boldsymbol{u}$ può essere scelto assegnando a x_3 un valore arbitrario, ad esempio $x_3 = 0$ e ricavando x_2 e x_1 per sostituzione all'indietro: si ha così $\boldsymbol{u} = [\,1,\ -5,\ 0\,]^T$. Il nucleo di A ha dimensione uno, quindi $\boldsymbol{z}$ ha la forma $\alpha\boldsymbol{v}$, dove $\boldsymbol{v}$ è un qualunque vettore non nullo del nucleo e $\alpha \in \mathbb{R}$. Per soddisfare la condizione posta basterà scegliere $\boldsymbol{v}$ tale che $\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{v} = 1$. Ma $\boldsymbol{v} = \beta[\,0,\ 1,\ 1\,]^T$, come si ottiene da sistema lineare omogeneo, quindi dalla condizione sul prodotto scalare si ha $\beta = -1/5$, e $\boldsymbol{v} = [\,0,\ -1/5,\ -1/5\,]^T$.