

Soluzione della prima prova intermedia
di Algebra lineare del 21 marzo 2012

Esercizio 1

- (a) Per studiare la dimensione di V_k basta determinare il rango della matrice A_k , le cui colonne sono i vettori che generano V_k :

$$A_k = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-k & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & k & k^2 & k^3 \end{bmatrix}.$$

Con il metodo di Gauss si ottengono le matrici seguenti:

$$A_{k,1} = A_k, \quad A_{k,2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-k & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & k-1 & k^2-1 & k^3-1 \end{bmatrix},$$

$$A_{k,3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 1-k & 0 \\ 0 & k-1 & k^2-1 & k^3-1 \end{bmatrix},$$

$$A_{k,4} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 1-k & 0 \\ 0 & 0 & k^2-3k+2 & k^3-7k+6 \end{bmatrix}.$$

Per $k = 1$ si ha

$$A_{1,4} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

dunque $\text{rk } A_1 = 2$. Per $k \neq 1$

$$A_{k,5} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 1-k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k^3-7k+6 \end{bmatrix},$$

il cui rango è 3 per $k = 2$, o $k = -3$, dal momento che $k^3 - 7k + 6 = (k-1)(k-2)(k+3)$.

Quindi i valori di k per cui $\dim V < 4$ sono 1, 2 e -3 .

- (b) Dal punto precedente risulta che $\bar{k} = 1$. Come vettori di una base di V_1 si possono scegliere le prime due colonne di A_1 : $\mathbf{s}_1 = [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$, $\mathbf{s}_2 = [1 \ 1 \ 2 \ 1]^T$. Se a questi vettori si applica il procedimento di Gram-Schmidt si ottiene la base ortonormale formata dai vettori

$$\mathbf{y}_1 = \frac{1}{2}[1 \ 1 \ 1 \ 1]^T, \quad \mathbf{y}_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}}[-1 \ -1 \ 3 \ -1]^T.$$

- (c) R deve essere 2×2 . Le due colonne di R , \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 , sono le soluzioni dei due sistemi lineari

$$\begin{bmatrix} 1/2 & -\frac{1}{2\sqrt{3}} \\ 1/2 & -\frac{1}{2\sqrt{3}} \\ 1/2 & \frac{2}{3\sqrt{3}} \\ 1/2 & -\frac{1}{2\sqrt{3}} \end{bmatrix} [\mathbf{r}_1 \mid \mathbf{r}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Applicando il metodo di Gauss si ottiene la matrice aumentata

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1/2 & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right],$$

quindi, per sostituzione all'indietro:

$$R = [\mathbf{r}_1 \mid \mathbf{r}_2] = \begin{bmatrix} 2 & \frac{5}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}.$$

Esercizio 2

- (a) Si verifica che

$$A^2 = -A + 2I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Con semplici passaggi algebrici, da tale relazione si ottiene $\frac{1}{2}A(A+I) = I$, che prova che A è invertibile, che $A^{-1} = \frac{1}{2}(A+I)$, e conseguentemente A è non singolare. In alternativa, si può dimostrare che se $\mathbf{x} \in N(A)$, dalla relazione proposta segue $A^2\mathbf{x} = -A\mathbf{x} + 2\mathbf{x}$, e quindi $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, pertanto A è invertibile e non singolare.

- (b) Dal punto (a) si ottiene l'inversa:

$$A^{-1} = \frac{1}{2}(A+I) = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

(c) Se si usa la relazione $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj}(A)$, poiché $\det A = -2$ e

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & -4 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

si ha

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Se invece si vuole usare il metodo di Gauss, si ottengono le seguenti matrici aumentate:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right], \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array} \right],$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right];$$

poi, per sostituzione all'indietro, si ottiene, per colonne, A^{-1} :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

(d) (*facoltativo*) Poiché

$$B = A - I = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix},$$

si osserva facilmente che il rango di B è 1 perché la seconda e la terza colonna sono proporzionali alla prima. Dall'uguaglianza

$$B = \mathbf{u}\mathbf{v}^T = [\mathbf{u}v_1 \quad \mathbf{u}v_2 \quad \mathbf{u}v_3],$$

risulta che si può scegliere $\mathbf{u} = [1 \ 2 \ -1]^T$, $v_1 = 1$, $v_2 = -1$, $v_3 = 2$. Inoltre si ha

$$\begin{aligned} A^2 &= (I + \mathbf{u}\mathbf{v}^T)^2 = I + 2\mathbf{u}\mathbf{v}^T + \mathbf{u}(\mathbf{v}^T\mathbf{u})\mathbf{v}^T \\ &= I + 2\mathbf{u}\mathbf{v}^T - 3\mathbf{u}\mathbf{v}^T = I - \mathbf{u}\mathbf{v}^T = I - (A - I) = -A + 2I. \end{aligned}$$

Esercizio 3

(a) La matrice, per $n \geq 2$, ha la forma seguente:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

il cui determinante, applicando la regola di Laplace all'ultima riga, risulta

$$\det A = (-1)^{n+1} \det A_{n,1} + (-1)^{2n} \det A_{n,n} = (-1)^{n+1} + 1,$$

ed è nullo per n pari.

(b) La matrice ottenuta da A al passo k -esimo del metodo di Gauss ha la forma:

$$A^{(k)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \cdots & (-1)^{k-1} & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad k = 1, \dots, n-1.$$

dove l'elemento modificato dell'ultima riga è nella k -esima colonna. Quindi

$$A^{(n)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 + (-1)^{n-1} \end{bmatrix},$$

e, per n pari

$$A^{(n)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

I vettori del nucleo $N(A)$ sono le soluzioni del sistema $A^{(n)}\mathbf{x} = \mathbf{0}$, che, posto $x_n = \alpha \in \mathbf{R}$, hanno la forma $\mathbf{x} = \alpha [(-1)^{n-1}, (-1)^{n-2}, \dots, -1, 1]^T$.