Soluzione della prima prova intermedia di Algebra lineare del 17 aprile 2009

Esercizio 1

Si può affrontare l'esercizio applicando il metodo di Gauss in due modi diversi.

(a) Limitandosi ad effettuare scambi di righe nei soli casi di pivot nulli, si ottengono le seguenti matrici aumentate:

$$[A^{(1)}|\mathbf{b}^{(1)}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & k \\ -2 & k & 3 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & -5 & -1 & -9 \\ 4 & 3 & -1 & -2 & -6 \end{array}\right],$$

$$[A^{(2)}|\mathbf{b}^{(2)}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & k \\ 0 & k+2 & 5 & -2 & 2(k+2) \\ 0 & -2 & -10 & 4 & -5k-9 \\ 0 & -1 & -5 & 2 & -2(2k+3) \end{array}\right],$$

per $k \neq -2$:

$$[A^{(3)}|\mathbf{b}^{(3)}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & k \\ 0 & k+2 & 5 & -2 & 2(k+2) \\ 0 & 0 & \frac{-10(k+1)}{k+2} & \frac{4(k+1)}{k+2} & -5(k+1) \\ 0 & 0 & \frac{-5(k+1)}{k+2} & \frac{2(k+1)}{k+2} & -4(k+1) \end{array}\right],$$

per $k \neq -2, k \neq -1$:

$$[A^{(4)}|\mathbf{b}^{(4)}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & k \\ 0 & k+2 & 5 & -2 & 2(k+2) \\ 0 & 0 & \frac{-10(k+1)}{k+2} & \frac{4(k+1)}{k+2} & -5(k+1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-3(k+1)}{2} \end{array}\right].$$

Si può anche includere il valore $k = -1$, evitando quindi di trattarlo a parte, se si osserva che pur risultando in tal caso $a_{33}^{(3)} = 0$, si può effettuare la combinazione lineare sulla quarta riga senza dover dividere per $a_{33}^{(3)}$. Comunque, poiché per $k \neq -1$, $b_4^{(4)} \neq 0$, il teorema di Rouché-Capelli non è verificato. Quindi, se $k \notin \{-2, -1\}$, non esistono soluzioni.

Restano da esaminare i casi $k = -2$ e $k = -1$. Se $k = -2$, da $[A^{(2)}|\mathbf{b}^{(2)}]$, dopo aver scambiato la seconda con la terza riga, si ottiene

$$[A^{(3)}|\mathbf{b}^{(3)}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -10 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{array}\right],$$

e quindi non esistono soluzioni.

Se $k=-1$, sostituendo k in $[A^{(3)}|\mathbf{b}^{(3)}]$ si ottiene

$$[A^{(3)}|\mathbf{b}^{(3)}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

pertanto, essendo $\mathrm{rk}(A^{(3)}) = \mathrm{rk}([A^{(3)})|\mathbf{b}^{(3)}] = 2$, il solo valore di k per cui si hanno infinite soluzioni è $k=-1$.

(b) In alternativa, si può applicare il metodo di Gauss dopo avere preliminarmente scambiato la seconda con la quarta riga di $[A^{(1)}|\mathbf{b}^{(1)}]$ con lo scopo di ridurre le occorrenze di pivot dipendenti da k. Così facendo, chiamando ancora $[A^{(1)}|\mathbf{b}^{(1)}]$ la matrice iniziale dopo lo scambio di righe, si ottengono le matrici aumentate seguenti:

$$[A^{(1)}|\mathbf{b}^{(1)}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & k \\ 4 & 3 & -1 & -2 & -6 \\ 5 & 3 & -5 & -1 & -9 \\ -2 & k & 3 & 0 & 4 \end{array}\right],$$

$$[A^{(2)}|\mathbf{b}^{(2)}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & k \\ 0 & -1 & -5 & 2 & -2(2k+3) \\ 0 & -2 & -10 & 4 & -5k-9 \\ 0 & k+2 & 5 & -2 & 2(k+2) \end{array}\right],$$

$$[A^{(3)}|\mathbf{b}^{(3)}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & k \\ 0 & -1 & -5 & 2 & -2(2k+3) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3(k+1) \\ 0 & 0 & -5(k+1) & 2(k+1) & -4(k^2+3k+2) \end{array}\right],$$

e, scambiando la terza riga con la quarta,

$$[A^{(4)}|\mathbf{b}^{(4)}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & k \\ 0 & -1 & -5 & 2 & -2(2k+3) \\ 0 & 0 & -5(k+1) & 2(k+1) & -4(k^2+3k+2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3(k+1) \end{array}\right].$$

Per il teorema di Rouché-Capelli, affinché esistano soluzioni deve essere $b_4^{(4)} = 0$, e quindi $k=-1$. Per tale valore di k è

$$[A^{(4)}|\mathbf{b}^{(4)}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -5 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

che, a parte il segno della seconda riga, è la stessa forma triangolare ottenuta con la riduzione descritta in **(a)**.

Dopo aver assegnato valori arbitrari α e β rispettivamente a x_4 e x_3, si ottiene, sostituendo all'indietro:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Imponendo le condizioni $x_1 = -x_2$ e $x_4 = 0$ si ha infine il sistema lineare in α, β:

$$\begin{cases} -3 - \alpha + 4\beta = -2 - 2\alpha + 5\beta \\ \alpha = 0 \end{cases},$$

che ha l'unica soluzione $\alpha = 0, \beta = -1$, e, corrispondentemente

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -7 \\ 7 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 2

La i-esima colonna di A è il vettore $f(\mathbf{e}_i)$, dove i vettori $\mathbf{e}_i$, $i = 1, 2, 3$ sono i tre vettori della base canonica di $\mathbf{R}^3$. Dunque:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & -5 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La riduzione a forma triangolare con il metodo di Gauss dà:

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -6 & 3 \end{bmatrix}, \quad A^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

e ne segue che $\dim S(A) = \mathrm{rk}(A) = 2$, e $\dim N(A) = 3 - \mathrm{rk}(A) = 1$.
Una base U di $S(A)$ può essere formata da due colonne linearmente indipendenti di A, ad esempio la prima e la seconda, perché lo sono la prima e la seconda di $A^{(3)}$:

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

$N(A)$ è formato dalle soluzioni di $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, che, ridotto alla forma triangolare

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

ammette soluzioni della forma

$$\mathbf{x} = \alpha \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix},$$

per $\alpha \in \mathbf{R}$. Quindi una base V di $N(A)$ è:

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}.$$

Esercizio 3

La matrice A è così fatta:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Applicando lo sviluppo di Laplace alla quarta riga si ha:

$$\det A = -2 \det A_{41} + \det A_{42},$$

dove

$$\det A_{41} = \det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 2 \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - \det \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = -6 + 2 = -4,$$

e

$$\det A_{42} = \det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = -3.$$

Sostituendo:

$$\det A = 8 - 3 = 5.$$