Soluzione della prima prova intermedia
di Algebra lineare del 21 marzo 2012

## Esercizio 1

**(a)** Per studiare la dimensione di $V_k$ basta determinare il rango della matrice $A_k$, le cui colonne sono i vettori che generano $V_k$:

$$A_k = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2k+3 & -1 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \\ 1 & k & k^2 & k^3 \end{bmatrix}.$$

Con il metodo di Gauss si ottengono le matrici seguenti:

$$A_{k,1} = A_k, \quad A_{k,2} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2k+2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -7 \\ 0 & k+1 & k^2-1 & k^3+1 \end{bmatrix},$$

$$A_{k,3} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 2k+2 & 0 \\ 0 & k+1 & k^2-1 & k^3+1 \end{bmatrix},$$

$$A_{k,4} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 2k+2 & 0 \\ 0 & 0 & k^2+3k+2 & k^3-7k-6 \end{bmatrix}.$$

Per $k=-1$ si ha

$$A_{-1,4} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

dunque $\operatorname{rk} A_{-1} = 2$. Per $k \neq -1$

$$A_{k,5} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 2k+2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k^3-7k-6 \end{bmatrix},$$

il cui rango è 3 per $k=-2$, o $k=3$, dal momento che $k^3-7k-6 = (k+1)(k+2)(k-3)$.

Quindi i valori di $k$ per cui $\dim V < 4$ sono $-1$, $-2$ e 3.

**(b)** Dal punto precedente risulta che $\bar{k} = -1$. Come vettori di una base di $V_{-1}$ si possono scegliere le prime due colonne di $A_1$: $\mathbf{s}_1 = [\ 1\ 1\ 1\ 1\ ]^T$, $\mathbf{s}_2 = [\ -1\ -1\ -2\ -1\ ]^T$. Se a questi vettori si applica il procedimento di Gram-Schmidt si ottiene la base ortonormale formata dai vettori

$$\mathbf{y}_1 = \frac{1}{2}[\ 1\ 1\ 1\ 1\ ]^T, \qquad \mathbf{y}_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}}[\ 1\ 1\ -3\ 1\ ]^T.$$

**(c)** $R$ deve essere $2 \times 2$. Le due colonne di $R$, $\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{r}_2$, sono le soluzioni dei due sistemi lineari

$$\begin{bmatrix} 1/2 & \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ 1/2 & \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ 1/2 & -\frac{3}{2\sqrt{3}} \\ 1/2 & \frac{1}{2\sqrt{3}} \end{bmatrix} \left[\ \mathbf{r}_1 \mid \mathbf{r}_2\ \right] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Applicando il metodo di Gauss si ottiene la matrice aumentata

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1/2 & \frac{1}{2\sqrt{3}} & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{3}} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

quindi, per sostituzione all'indietro:

$$R = \left[\ \mathbf{r}_1 \mid \mathbf{r}_2\ \right] = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{5}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}.$$

## Esercizio 2

**(a)** Si verifica che

$$A^2 = -3A + 4I = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -6 \\ 6 & 7 & -12 \\ -3 & -3 & 7 \end{bmatrix}.$$

Con semplici passaggi algebrici, da tale relazione si ottiene $\frac{1}{4}A(A + 3I) = I$, che prova che $A$ è invertibile, che $A^{-1} = \frac{1}{4}(A + 3I)$, e conseguentemente $A$ è non singolare. In alternativa, si può dimostrare che se $\mathbf{x} \in N(A)$, dalla relazione proposta segue $A^2\mathbf{x} = -3A\mathbf{x} + 4\mathbf{x}$, e quindi $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, pertanto $A$ è invertibile e non singolare.

**(b)** Dal punto (a) si ottiene l'inversa:

$$A^{-1} = \frac{1}{4}(A + 3I) = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

**(c)** Se si usa la relazione $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\text{adj}\,(A)$, poiché $\det A = -4$ e

$$\text{adj}\,(A) = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & -4 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix},$$

si ha

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Se invece si vuole usare il metodo di Gauss, si ottengono le seguenti matrici aumentate:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right], \left[\begin{array}{ccc|ccc} -2 & -1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right],$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right];$$

poi, per sostituzione all'indietro, si ottiene, per colonne, $A^{-1}$:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

**(d)** (*facoltativo*) Poiché

$$B = A - I = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix},$$

si osserva facilmente che il rango di $B$ è 1 perché la seconda e la terza colonna sono proporzionali alla prima. Dall'uguaglianza

$$B = \mathbf{u}\mathbf{v}^T = \left[\ \mathbf{u}v_1 \quad \mathbf{u}v_2 \quad \mathbf{u}v_3\ \right],$$

risulta che si può scegliere $\mathbf{u} = [\ -1\ \ -2\ 1\ ]^T$, $v_1 = 1$, $v_2 = 1$, $v_3 = -2$. Inoltre si ha

$$A^2 = (I + \mathbf{u}\mathbf{v}^T)^2 = I + 2\mathbf{u}\mathbf{v}^T + \mathbf{u}(\mathbf{v}^T\mathbf{u})\mathbf{v}^T$$

$$= I + 2\mathbf{u}\mathbf{v}^T - 5\mathbf{u}\mathbf{v}^T = I - 3\mathbf{u}\mathbf{v}^T = I - 3(A - I) = -3A + 4I.$$

# Esercizio 3

**(a)** La matrice, per $n \geq 2$, ha la forma seguente:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

il cui determinante, applicando la regola di Laplace all'ultima riga, risulta

$$\det A = (-1)^{n+1}(-1)\det A_{n,1} + (-1)^{2n}\det A_{n,n} = (-1)^{n+1}(-1)(-1)^{n-1} + 1,$$

ed è nullo per tutti i valori $n \geq 2$.

**(b)** La matrice ottenuta da $A$ al passo $k$-esimo del metodo di Gauss ha la forma:

$$A^{(k)} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -1 \\ 0 & \cdots & -1 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad k = 1, \ldots, n-1.$$

dove l'elemento modificato dell'ultima riga è nella $k$-esima colonna. Quindi

$$A^{(n)} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

I vettori del nucleo $N(A)$ sono le soluzioni del sistema $A^{(n)}\mathbf{x} = \mathbf{0}$, che, posto $x_n = \alpha \in \mathbf{R}$, hanno la forma $\mathbf{x} = \alpha[\ 1, 1, \cdots, 1, 1\ ]^T$.