Soluzione della prima prova intermedia di Algebra lineare del 22 novembre 2013 - compito D

Esercizio 1

(a) Si applica il metodo di Gauss al sistema lineare, e si ottengono le seguenti matrici aumentate:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -k & 1 & -k+1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ -k & 1 & k & 2 \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -k & 1 & -k+1 \\ 0 & 1-k & 3 & -k+2 \\ 0 & 1-k^2 & 2k & k(1-k)+2 \end{array}\right],$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -k & 1 & -k+1 \\ 0 & 1-k & 3 & -k+2 \\ 0 & 0 & -k-3 & 0 \end{array}\right].$$

Per $k \neq 1, -3$ la matrice è non singolare, quindi la soluzione esiste unica. Per $k = 1$ la matrice triangolare superiore a scalini è

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right],$$

quindi non esistono soluzioni. Infine per $k = -3$ la matrice triangolare superiore a scalini è

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

quindi esistono infinite soluzioni. Si conclude che il sistema lineare è consistente per $k \neq 1$.

(b) Sia $k = -3$. Dalla forma triangolare superiore ottenuta al punto (a) per $k = -3$, si ha $\dim S(A) = \operatorname{rk} A = 2$ e $\dim N(A) = 3 - \operatorname{rk} A = 1$. Una base di $S(A)$ è formata dalle prime due colonne di A: $\{[1\ -1\ 3]^T, [3\ 1\ 1]^T\}$. I vettori di $N(A)$ sono le soluzioni di $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, quindi, ponendo $x_3 = \alpha$, sono tutti i vettori della forma

$$\alpha \begin{bmatrix} \frac{5}{4} \\ -\frac{3}{4} \\ 1 \end{bmatrix},$$

perciò un base di $N(A))$ è formata dal vettore $[\,\frac{5}{4}\ -\frac{3}{4}\ 1\,]^T$.

(c) Per qualunque matrice $N(A) \subseteq N(A^2)$: infatti, se $\mathbf{x} \in N(A)$, allora $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, quindi $A^2\mathbf{x} = A(A\mathbf{x}) = A\mathbf{0} = \mathbf{0}$. Dimostriamo, nel caso della matrice A con $k = 3$, che vale anche l'inclusione $N(A^2) \subseteq N(A)$:

infatti, se $\mathbf{x} \in N(A^2)$, allora $A(A\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ e quindi $A\mathbf{x} \in N(A)$: questo implica che sia

$$A\mathbf{x} = \alpha \begin{bmatrix} \frac{5}{4} \\ -\frac{3}{4} \\ 1 \end{bmatrix},$$

per qualche α. Riportando con il metodo di Gauss tale sistema a forma triangolare si ottiene

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & \frac{5}{4}\alpha \\ 0 & 4 & 3 & \frac{1}{2}\alpha \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{4}\alpha \end{array}\right],$$

e quindi il sistema è consistente per $\alpha = 0$, ovvero per $\mathbf{x} \in N(A)$.

Dalle due inclusioni segue che deve essere $N(A) = N(A^2)$.

Esercizio 2

(a) Siano P e Q le matrici che rappresentano le applicazioni identiche di $\mathbf{R}^3$ e $\mathbf{R}^2$, rispettivamente, dagli spazi con le basi assegnate agli spazi con le basi canoniche. Si ha

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La matrice B è la seguenter

$$B = Q^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

(b) Modificando il terzo vettore della base di $\mathbf{R}^3$ si modifica la terza colonna di P; se indichiamo con $\mathbf{p}_3$ la terza colonna di P, e con $\mathbf{b}_3$ la terza colonna di B, dal punto (a) si ha la relazione:

$$\mathbf{b}_3 = Q^{-1}A\mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{p}_3.$$

Quindi la sola colonna di B che può annullarsi in conseguenza di una variazione di $\mathbf{p}_3$ è la terza, e questo accade se e solo se $\mathbf{p}_3 \in N(Q^{-1}A)$. La forma triangolare di $Q^{-1}A$, ottenuta con il metodo di Gauss, è

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

da cui si ha che i vettori del suo nucleo hanno la forma $\alpha[1\ \ -1\ 1]^T$, per $\alpha \in \mathbf{R}$. Ad esempio, si può scegliere $\mathbf{p}_3 = [1\ \ -1\ 1]^T$.

Esercizio 3

(a) Si considera il sistema $AX = I$, che ha la seguente matrice aumentata:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \gamma & \beta & \alpha & 1 & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Invece di riportare la matrice dei coefficienti a forma triangolare superiore, è più semplice riportarla a forma triangolare inferiore, scambiando la prima con la terza riga:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \beta & \alpha & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \gamma & \beta & \alpha & 1 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

A è invertibile se e solo se $\alpha \neq 0$, e, con tre sostituzioni in avanti si ha:

$$A^{-1} = X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\alpha} \\ 0 & \frac{1}{\alpha} & -\frac{\beta}{\alpha^2} \\ \frac{1}{\alpha} & -\frac{\beta}{\alpha^2} & \frac{\beta^2}{\alpha^3} - \frac{\gamma}{\alpha^2} \end{bmatrix}.$$

(b) Detta C la matrice dei cofattori, si ha:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\alpha^2 \\ 0 & -\alpha^2 & \alpha\beta \\ -\alpha^2 & \alpha\beta & \alpha\gamma - \beta^2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} A^{-1} = \frac{1}{\det A} C^T &= \frac{1}{-\alpha^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\alpha^2 \\ 0 & -\alpha^2 & \alpha\beta \\ -\alpha^2 & \alpha\beta & \alpha\gamma - \beta^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\alpha} \\ 0 & \frac{1}{\alpha} & -\frac{\beta}{\alpha^2} \\ \frac{1}{\alpha} & -\frac{\beta}{\alpha^2} & \frac{\beta^2}{\alpha^3} - \frac{\gamma}{\alpha^2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(c) Per $\alpha = 1$ e $\gamma = 0$ si ha:

$$Z = A + A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \beta & 1 \\ \beta & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\beta \\ 1 & -\beta & \beta^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \beta & 2 \\ \beta & 2 & -\beta \\ 2 & -\beta & \beta^2 \end{bmatrix}.$$

Applicando la regola di Laplace rispetto alla prima riga si ottiene:

$$\det Z = -\beta(\beta^3 + 2\beta) + 2(-\beta^2 - 4) = -\beta^4 - 4\beta^2 - 8.$$

È $\det Z < 0$ per ogni β, quindi non esistono matrici Z singolari.