Soluzione della seconda prova intermedia
di Algebra lineare del 20 maggio 2010

Esercizio 1

(a) Se si calcola il polinomio caratteristico

$$p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 7-\lambda & -6 & 2 \\ -4 & 2-\lambda & -1 \\ -4 & 3 & -2-\lambda \end{bmatrix}$$

usando lo sviluppo di Laplace secondo la prima riga, si ha

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= (7-\lambda)(\lambda^2-1) + 6(4\lambda+4) + 2(-4\lambda-4) \\ &= (7-\lambda)[(\lambda+1)(\lambda-1) + 16(\lambda+1)] \\ &= (\lambda+1)[(7-\lambda)(\lambda-1) + 16] \\ &= (\lambda+1)(-\lambda-1)(\lambda-9). \end{aligned}$$

Gli autovalori sono dunque $\lambda_1 = -1$ con molteplicità algebrica 2 e $\lambda_2 = 9$. λ_1 ha molteplicità geometrica 2, infatti la matrice $A - \lambda_1 I$ viene triangolarizzata con il metodo di Gauss nella forma

$$\begin{bmatrix} 8 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

pertanto $\dim N(A-\lambda_1 I) = 3 - \text{rk } (A - \lambda_1 I) = 2$. Gli autovettori hanno la forma

$$c_1 \begin{bmatrix} -1/4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 3/4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

al variare di c_1 e c_2 reali. Gli autovettori relativi a λ_2 sono le soluzioni del sistema $(A - \lambda_2 I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, la cui matrice triangolarizzata con Gauss diventa:

$$\begin{bmatrix} -2 & -6 & 2 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Gli autovettori relativi a λ_2 sono

$$c_3 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

per c_3 reale.

(b) A è diagonalizzabile perché ammette tre autovettori linearmente indipendenti, come risulta dal punto precedente, essendo le molteplicità geometriche degli autovalori uguali alle rispettive molteplicità algebriche. S ha come colonne tre autovettori linearmente indipendenti, ad esempio

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La matrice diagonale D è necessariamente

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

(c) Poiché $A = SDS^{-1}$ deve essere $SD^2S^{-1} = \alpha SDS^{-1} + \beta I$, da cui, moltiplicando entrambi i membri per S^{-1} a sinistra e S a destra, si ottiene $D^2 = \alpha D + \beta I$. Uguagliando gli elementi diagonali si hanno le due equazioni $\lambda_i^2 = \alpha\lambda_i + \beta$, $i = 1, 2$, ovvero

$$\begin{cases} 1 = -\alpha + \beta \\ 81 = 9\alpha + \beta \end{cases},$$

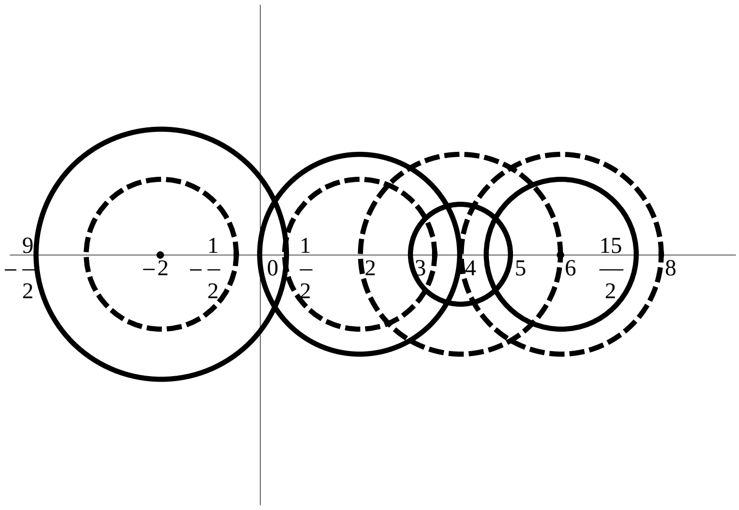
la cui unica soluzione è $\alpha = 8$, $\beta = 9$.

Si osservi che, se α e β esistono, essendo gli autovalori di A^2 i quadrati degli autovalori di A, e dovendo gli autovalori di $\alpha A + \beta I$ avere la forma $\alpha\lambda + \beta$, allora α e β sono necessariamente le soluzioni del sistema di cui sopra. Tuttavia, se A non fosse diagonalizzabile, la relazione $A^2 = \alpha A + \beta I$ non sarebbe soddisfatta.

A è invertibile perché ha autovalori non nulli, e se si moltiplica A^{-1} per entrambi i membri della relazione proposta si ha $A = \alpha I + \beta A^{-1}$ e quindi $A^{-1} = \frac{1}{\beta}A - \frac{\alpha}{\beta}I$, pertanto $\gamma = \frac{1}{9}$, $\delta = -\frac{8}{9}$.

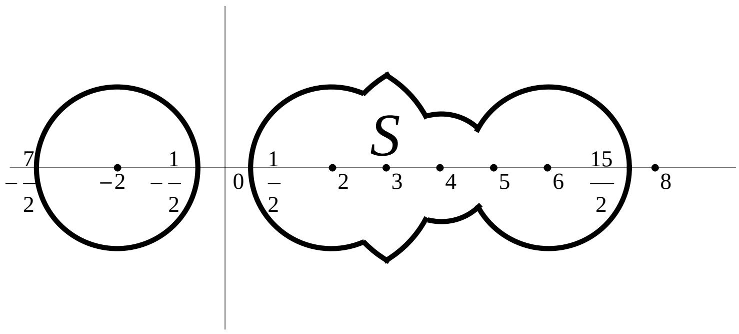
Esercizio 2

(a) I cerchi di Gerschgorin per riga (linea continua) e per colonna (linea tratteggiata) sono i seguenti:



Il cerchio di centro -2 e raggio 3/2, disgiunto dall'unione dei restanti cerchi per colonna, contiene un solo autovalore, necessariamente reale, gli altri autovalori possono essere tutti e tre reali oppure uno reale e due complessi coniugati.

Per una migliore localizzazione degli autovalori si considera l'intersezione dell'unione dei cerchi per riga con l'unione dei cerchi per colonna, raffigurata qui di seguito:



Si conclude che un autovalore reale appartiene all'intervallo $[-7/2, -1/2]$, gli altri (che possono essere tutti e tre reali oppure uno reale e due complessi coniugati) appartengono all'insieme S.

(b) - Gli autovalori non reali sono al più due.

- A è non singolare perché lo zero non appartiene alla regione individuata con i cerchi di Gerschgorin.
- Dalla localizzazione risultante al punto (a) si ottiene $\alpha = 1/2$ e $\beta = 15/2$.

Esercizio 3

(a) I coefficienti del polinomio di interpolazione $p(x)$ sono la soluzione $\mathbf{a}$ del sistema $V\mathbf{a} = \mathbf{f}$, la cui matrice aumentata iniziale è

$$[V|\mathbf{f}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & \sqrt{3} & 1 & 3\sqrt{3} \end{array}\right].$$

Con il metodo di Gauss si ottiene

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 2\sqrt{3} \end{array}\right],$$

e, sostituendo all'indietro, $\mathbf{a} = [-\sqrt{3}\ 1\ \sqrt{3}]^T$, e quindi

$$p(x) = \sqrt{3}x^2 + x - \sqrt{3}.$$

I coefficienti del polinomio di regressione lineare $q(x)$ sono la soluzione $\mathbf{a}$ del sistema $V^TV\mathbf{a} = V^T\mathbf{f}$, con

$$V = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix},$$

la cui matrice aumentata iniziale è

$$[V^TV|V^T\mathbf{f}] = \left[\begin{array}{cc|c} 5 & \sqrt{3} & 11 \\ \sqrt{3} & 3 & 3\sqrt{3} \end{array}\right],$$

da cui, con il metodo di Gauss si ottiene

$$\left[\begin{array}{cc|c} 5 & \sqrt{3} & 11 \\ 0 & \frac{12}{5} & \frac{4}{5}\sqrt{3} \end{array}\right],$$

e, sostituendo all'indietro, $\mathbf{a} = [2\ \frac{1}{\sqrt{3}}\ ]^T$, e quindi $q(x) = 2x + \frac{1}{\sqrt{3}}$.

(b) Il resto $r(x) = f(x) - q(x)$ è derivabile, quindi r_q è il massimo in valore assoluto tra i valori agli estremi x_0 e x_2 e i valori nei punti stazionari compresi nell'intervallo. I punti stazionari annullano la derivata prima $3x^2 - 2$ e quindi sono $-\sqrt{2/3}$ e $\sqrt{2/3}$. Si ha dunque

$$r_q = \max\left\{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\ ,\ \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\ ,\ \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\ ,\ 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$$

$$= \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3\sqrt{3}}(4\sqrt{2} + 3).$$

(c) (*facoltativo*) Il resto $r(x) = f(x) - p(x)$ è derivabile e si annulla agli estremi x_0 e x_2, quindi r_p è il massimo in valore assoluto tra i valori nei punti stazionari compresi nell'intervallo. I punti stazionari annullano la derivata prima $3x^2 - 2\sqrt{3}x - 1$ e sono $\alpha = (1 - \sqrt{2})/\sqrt{3}$ e $\beta = (1+\sqrt{2})/\sqrt{3}$. I rispettivi valori del resto $r(x) = x^3 - \sqrt{3}x^2 - x + \sqrt{3} = (x - \sqrt{3})(x^2 - 1)$ sono

$$r(\alpha) = \frac{4}{3\sqrt{3}}(1 + \sqrt{2}), \qquad r(\beta) = \frac{4}{3\sqrt{3}}(1 - \sqrt{2}).$$

Quindi

$$r_p = r(\alpha) = \frac{4}{3\sqrt{3}}(1 + \sqrt{2}) > r_q.$$

Si osservi che in questo caso particolare la formula fornita dal teorema del resto dà proprio il polinomio $(x - \sqrt{3})(x^2 - 1)$.