Soluzione della seconda prova intermedia di Algebra lineare del 31 maggio 2011

Esercizio 1

(a) Si calcola il polinomio caratteristico

$$p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & k-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

usando lo sviluppo di Laplace secondo la prima riga, e si ha

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= (1-\lambda)((k-\lambda)(1-\lambda)-1)+(1-\lambda-1)+(1-(k-\lambda)) \\ &= -\lambda^3+(2+k)\lambda^2-2k\lambda \\ &= -\lambda(\lambda^2-(2+k)\lambda+2k). \end{aligned}$$

Gli autovalori sono dunque $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = k$.

(b) Per $k \neq 0, 2$ gli autovalori sono distinti e A è diagonalizzabile. I soli valori di k per cui $A_k = A$ potrebbe non essere diagonalizzabile sono 0 e 2, che si esaminano separatamente.

Per $k = 0$ gli autovettori relativi a $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$ sono i vettori non nulli del nucleo di A_0, che viene triangolarizzata con il metodo di Gauss nella forma

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

pertanto $\dim N(A_0) = 3 - \mathrm{rk}\,(A_0) = 1$. Gli autovettori hanno la forma

$$c \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

al variare di c reale. La molteplicità geometrica dell'autovalore 0 è minore di quella algebrica e quindi A_0 non è diagonalizzabile.

Per $k = 2$ gli autovettori relativi a $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ sono i vettori non nulli del nucleo di $A_2 - 2I$, che viene triangolarizzata con il metodo di Gauss nella forma

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

pertanto $\dim N(A_2 - 2I) = 3 - \text{rk } (A_2 - 2I) = 1$. Gli autovettori hanno la forma

$$c \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

al variare di c reale. La molteplicità geometrica dell'autovalore 2 è minore di quella algebrica e quindi A_2 non è diagonalizzabile.

(c) (*facoltativo*) Si scelga $k = 0$ (per $k = 2$ il procedimento è analogo). Poiché $T = S^{-1}A_0S$, T ha gli stessi autovalori di A_0, con le stesse molteplicità. Ne segue che gli elementi diagonali di T, autovalori di T, devono essere $t_{11} = t_{22} = 0, \quad t_{33} = 2$. Se si chiama $\mathbf{s}_i$ la $i-$esima colonna di S, dall'uguaglianza $A_0S = ST$ si ottengono i tre sistemi lineari

$$A_0\mathbf{s}_1 = 0\mathbf{s}_1, \quad A_0\mathbf{s}_2 = 0\mathbf{s}_2 + \mathbf{s}_1, \quad A_0\mathbf{s}_3 = 2\mathbf{s}_3.$$

Quindi $\mathbf{s}_1$ è un autovettore relativo a 0, $\mathbf{s}_3$ è un autovettore relativo a 2. Si può scegliere $\mathbf{s}_1 = [-1\ 0\ 1]^T$, e come $\mathbf{s}_3$ un vettore non nullo del nucleo di $A_0 - 2I$, che viene triangolarizzata con il metodo di Gauss nella forma

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

e quindi, ad esempio, $\mathbf{s}_3 = [1\ 2\ 3]^T$. Finalmente $\mathbf{s}_2$ deve essere una delle infinite soluzioni del sistema

$$A_0\mathbf{s}_2 = \mathbf{s}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

ad esempio $\mathbf{s}_2 = [0\ 1\ 0]$. La matrice così ottenuta

$$S = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

è invertibile, infatti $\det S = -4$.

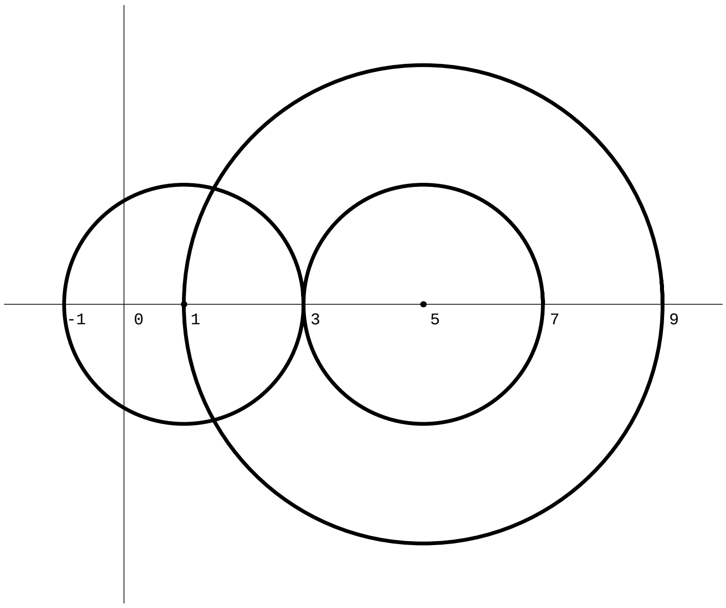
Esercizio 2

(a) Si ottiene

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Poiché $\det A = \det A^T = 1$, A e A^T sono non singolari, e B è non singolare in quanto prodotto di matrici non singolari. Inoltre, per il teorema di Binet, $\det B = 1$.

(b) I cerchi di Gerschgorin per riga (che coincidono con quelli per colonna perché B è simmetrica) sono i seguenti:



B è simmetrica, quindi ha autovalori reali. Si conclude che gli autovalori di B appartengono all'intervallo $[-1,\ 9]$.

(c) Dalla localizzazione ottenuta con i cerchi di Gerschgorin si ha immediatamente $M = 9$, ma non risulta una limitazione inferiore positiva m per il modulo degli autovalori. Si osservi però che, detti λ_i gli autovalori di B, con $|\lambda_1| \leq |\lambda_i|$ per $i \geq 2$, e tenendo conto della relazione

$$\prod_{i=1}^{5} \lambda_i = \det B = 1,$$

si ha:

$$\min_i |\lambda_i| = |\lambda_1| = \frac{1}{\prod_{i=2}^{5} |\lambda_i|} \geq \frac{1}{9^4}.$$

Si può quindi scegliere $m = 1/9^4$.

(d) B è definita positiva. Infatti la forma quadratica

$$\mathbf{x}^T B\mathbf{x} = \mathbf{x}^T AA^T\mathbf{x} = \mathbf{y}^T\mathbf{y},$$

con $\mathbf{y} = A^T\mathbf{x}$, è ovviamente non negativa. Ma non può essere nulla, altrimenti si avrebbe $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ per qualche $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, e questo è impossibile perché A è non singolare. Pertanto B ha autovalori reali e positivi.

Esercizio 3

(a) I coefficienti del polinomio di interpolazione $p(x)$ sono la soluzione $\mathbf{a}$ del sistema $V\mathbf{a} = \mathbf{f}$, la cui matrice aumentata iniziale è

$$[V|\mathbf{f}] = \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right].$$

Dopo aver scambiato la seconda e la quarta riga, con il metodo di Gauss si ottiene

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & k \end{array}\right],$$

e, sostituendo all'indietro, $\mathbf{a} = [k/2 \ 1-k \ -k/2 \ k]^T$, e quindi

$$p(x) = k/2x^3 + (1-k)x^2 - k/2x + k.$$

I coefficienti del polinomio di approssimazione ai minimi quadrati di grado massimo 2 $q(x)$ sono la soluzione $\mathbf{a}$ del sistema $V^TV\mathbf{a} = V^T\mathbf{f}$, con

$$V = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

la cui matrice aumentata iniziale è

$$[V^TV|V^T\mathbf{f}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 18 & 8 & 6 & 18 \\ 8 & 6 & 2 & 8 \\ 6 & 2 & 4 & 6+k \end{array}\right],$$

da cui, con il metodo di Gauss si ottiene

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 18 & 8 & 6 & 18 \\ 0 & \frac{22}{9} & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{20}{11} & k \end{array}\right],$$

e, sostituendo all'indietro, $\mathbf{a} = [-k/4+1 \ \ 3k/20 \ 11k/20]^T$, e quindi $q(x) = (-\frac{1}{4}k+1)x^2 + \frac{3}{20}kx + \frac{11}{20}k$.

(b) Il polinomio $p(x)$ ha grado 2 per $k = 0$. In tal caso si ottiene $p(x) = x^2 = q(x)$. Infatti, poiché il polinomio di interpolazione $p(x)$ rende nullo il vettore dei resti nei nodi, se ha grado due deve coincidere con il polinomio $q(x)$, che rende minima la lunghezza di tale vettore sui polinomi di grado massimo 2, ed è unico.